Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 9 (27 Novembre 2009)
Numeri complessi, spazi metrici, contrazioni

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Calcolare tutte le determinazioni dei seguenti numeri complessi:

   (a) $\log(2i-2)$ (b) $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$ (c) $i^{\frac{2}{\pi}}$

2. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e discuterne il comportamento sul bordo del disco di convergenza:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2+\exp(in)}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (3+i^n)^n z^n$

3. Calcolare:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx^2}\cos(nx)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$ (b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\log 3}{2}} \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^{2x}+1}dx$

4. Sia $X = C^1([-1,1])$ lo spazio delle funzioni di classe C^1:

   (a) Provare che $\|f\| := \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ è una norma su X.
   (b) Provare che $T : X \to \mathbb{R}$ definita come $T(f) = f'(0)$ è un'applicazione lineare.
   (c) Siano $f_n = \frac{\arctan(nx)}{n} \in X$: mostrare che $\|f_n\| \overset{n\to\infty}{\to} 0$ ma $|T(f_n)| \overset{n\to\infty}{\nrightarrow} T(0) = 0$. Dedurne che in generale non tutte le applicazioni lineari sono continue.

5. Sia X lo spazio delle successioni reali:

   (a) Provare che $\forall x \in X, p \geq 1$ si ha che $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$, dedurne che $\ell^p \subset \ell^\infty \ \forall p \geq 1$.
   (b) Provare che l'inclusione precedente è stretta, ovvero trovare $x \in \ell^\infty \setminus \bigcup_{p\geq 1} \ell^p$.
   (c) Provare che $\forall x \in X, p \geq q \geq 1$ si ha che $\|x\|_p \leq \|x\|_q$ e dedurne che $\ell^q \subset \ell^p \ \forall p \geq q \geq 1$.
   (d) Provare che l'inclusione precedente è stretta, cioè fissato $q \geq 1$ trovare $x \in X$ tale che $x \in \bigcap_{p>q} \ell^p \setminus \ell^q$.
   (e) Sia $c_0 = \{x \in \ell^\infty | x_n \overset{n\to\infty}{\to} 0\}$. Provare che $\ell^p \subset c_0 \ \forall p \geq 1$ e che tale inclusione è stretta, ovvero trovare $x \in X$ tale che $x \in c_0 \setminus \bigcup_{p\geq 1} \ell^p$.

6. Sia $X = C([0,1],\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$. Provare che $\Phi : X \to X$ definita come $\Phi(f)(x) = \int_0^1 ye^{-xy}f(y)dy$ è una contrazione in X.