

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

TUTORATO NUMERO 8 (20 NOVEMBRE 2009)

SERIE DI POTENZE, SERIE DI TAYLOR, SERIE COMPLESSE

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:

<http://www.lifedreamers.it/liuck>

1. Sviluppare in serie di Taylor nell'origine le seguenti funzioni:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$ (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ (c) $f(x) = x \cosh(x^2)$

2. Calcolare la somma delle seguenti serie di potenze:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{2n+1}$

3. Calcolare tutte le determinazioni dei seguenti numeri complessi:

(a) $\log(-3)$ (b) $\log(\sqrt{3} + i^3)$ (c) $\log\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \pi^n}{n!}\right)$ (d) i^i

4. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e discuterne il comportamento sul bordo del disco di convergenza:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{i^n n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i-1)^n}{n!} z^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(in) z^n$

5. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{nx^4 + n^3}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^x x^n$

6. Calcolare:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{ne^x \arctan(nx)}{n^2 x^2 + 1} dx$ (b) $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} dx$

7. Dare un esempio, ove possibile, di una serie di funzioni che su tutto \mathbb{R} converga:

- (a) Puntualmente e uniformemente ma non assolutamente né totalmente.
- (b) Puntualmente, uniformemente e totalmente ma non assolutamente.
- (c) Puntualmente e assolutamente ma non uniformemente né totalmente.
- (d) Puntualmente, assolutamente e totalmente ma non uniformemente.
- (e) Puntualmente ma non assolutamente né uniformemente né totalmente.
- (f) Puntualmente, assolutamente, uniformemente ma non totalmente.