Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Tutorato numero 7 (13 Novembre 2009)
Successioni di funzioni, serie di funzioni

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

   (a) $f_n(x) = \dfrac{1}{nx^2+1}$

   (b) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\chi_{[n,n+\frac{1}{n}]}$

   (c) $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$

   (d) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

   (e) $f_n(x) = \cos^n x$

   (f) $f_n(x) = \dfrac{\sin\left(n^2x^2\right)}{n^2x^2+1}$

2. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx^2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{x^2+n^2}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2x^2+1}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{\log n+\log(\log n)}$

3. Calcolare:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2}dx$

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2}dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi nx)}{n^2+n}dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n n^x}dx$

4. Sia $f_n(x) = xe^{-2n^2x^2}$. Calcolare $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$, stabilire se f_n e f_n' convergono uniformemente e dire per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$.

5. Provare che $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^{nx} e^{-t^2}dt}{n^2}$ è ben definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ e stabilire per quali x è derivabile.