

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

# Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

TUTORATO NUMERO 4 (16 OTTOBRE 2009)

MASSIMI E MINIMI IN PIÙ VARIABILI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:

<http://www.lifedreamers.it/liuck>

1. Determinare i punti stazionari delle seguenti funzioni e stabilire quali di essi sono di massimo e quali di minimo locale:

(a)  $f(x, y) = x^4 - 2x^2 - y^4 + 2y^2$

(b)  $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$

(c)  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

(d)  $f(x, y) = x^4 - x^3 \sin y$

(e)  $f(x, y, z) = \sin(xyz)$

2. Determinare l'estremo superiore e inferiore su tutto  $\mathbb{R}^2$  delle seguenti funzioni e stabilire se si tratta di massimi e/o di minimi.

(a)  $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2$

(b)  $f(x, y) = \frac{1}{x^4 + y^2 + 2y + 2}$

3. Discutere la continuità, la differenziabilità e l'esistenza di derivate parziali e differenziali delle seguenti funzioni:

(a)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(b)  $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

4. Provare, usando il lemma di Schwartz, che la funzione  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  è di classe  $C^1$  su tutto  $\mathbb{R}^2$  ma non è di classe  $C^2$ .

5. Provare, usando la regola di derivazione per funzioni composte, che

$$\nabla f = \left( \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad \forall f \in C^1(\mathbb{R}^2)$$