Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

TUTORATO NUMERO 10 (4 DICEMBRE 2009)
EQUAZIONI DIFFERENZIALI, CONTRAZIONI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

   (a) $\begin{cases} \dot{x} = \pi x \\ x(0) = 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x} = t^2 x^2 \\ x(0) = 3 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} \dot{x} = x - \arctan t + \frac{1}{t^2+1} \\ x(0) = 1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 4 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} \dot{x} = x \sin t + \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} t\dot{x} + x = t^2 x \\ x(1) = 1 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} \dot{x} = x + t \\ x(0) = 1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \dot{x} = \cos x \\ x(0) = 0 \end{cases}$ (i) $\begin{cases} \ddot{x} = \dot{x}^2 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

2. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali, discutendo l'eventuale parametro:

   (a) $\ddddot{x} - x = 0$

   (b) $\ddddot{x} + 6\ddot{x} + 9x = 0$

   (c) $\dddot{x} - \ddot{x} - \alpha\dot{x} + \alpha x = 0$

3. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

   (a) $\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0 \\ \dot{x}(0) = 5 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dddot{x} + \dot{x} = 0 \\ \ddot{x}(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \ddddot{x} - 2\ddot{x} + x = 0 \\ \dddot{x}(0) = 4 \\ \ddot{x}(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

4. Provare che il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = |x|^\alpha \\ x(0) = 0 \end{cases}$ ha un'unica soluzione $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$, e determinare esplicitamente tale soluzione; per $\alpha \in (0, 1)$ esibire almeno tre soluzioni distinte.

5. Sia $X = C([0, 1], \mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$. Provare che $\Phi : X \to X$ definita come $\Phi(f)(x) = \int_0^1 (xy)^\alpha f(y)dy$ è una contrazione in X $\forall \alpha > 0$.