Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

SOLUZIONI DEL TUTORATO NUMERO 6 (30 OTTOBRE 2009)
SERIE DI POTENZE, RIPASSO

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} x^n$: il raggio di convergenza della serie è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{e^n}{n}\right|}} =$
$= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{e}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{e}$; studiamo ora la convergenza ai bordi dell'intervallo:
per $x = \frac{1}{e}$ ottengo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge e per $x = -\frac{1}{e}$ ottengo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
che converge, dunque l'intervallo di convergenza è $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^{10}}$: il raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n^{10}}\right|}} =$
$= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{10}}} = 1}$; ai bordi dell'intervallo ottengo per $x = 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{10}}$ e per $x = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}}$, che convergono entrambe, dunque l'intervallo di convergenza è $[-1, 1]$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n$: il raggio di convergenza è $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^n}{n!}}{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{(n+1)!}{e^{n+1}} =$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{e} = \infty$,dunque la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n} x^n$: il raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{\pi^n}}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\pi}} = 0$,
quindi la serie converge solo in $x = 0$.

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^n x^n$: il raggio è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{\cos n}{n}\right)^n\right|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{|\cos n|}{n}} = \infty$,
dunque la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n x^n$: il raggio è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)^n\right|}} =$
$= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|} = 1$, dunque l'intervallo di convergenza è
$(-1, 1)$ perché ai bordi dell'intervallo di convergenza le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n$

e $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n$ non convergono perché il termine n-esimo non tende a 0.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n(n+2)}$: posto $y=x^2$ otteniamo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{y^n}{2^n(n+2)}$, il cui raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n(n+2)}}}=2$. Per $y=2$ ottengo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$ che converge, dunque ho convergenza per $0\le x^2\le 2$, ovvero per $x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n+4^n}$: il raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n+4^n}}}=$
$=\frac{1}{\frac{1}{4}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}}}=4$; l'intervallo di convergenza è $(-4,4)$, perchè sul bordo dell'intervallo ho le serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3^n+4^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{3^n+4^n}$ che non sono infinitesime.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$: il raggio di convergenza è $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n}=$
$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$; ai bordi dell'intervallo ho le serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}e^n$, che non convergono perché il termine n-esimo non tende a 0, in quanto $\frac{n!}{n^n}e^n\approx\sqrt{2\pi n}\overset{n\to\infty}{\to}\infty$; dunque, l'intervallo di convergenza è $(-e,e)$.

(j) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\left(e^{-n}\right)-1\right)x^n$: il raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\cos\left(e^{-n}\right)}}=$
$=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{-2n}}{2}+o(e^{-3n})}}=\frac{1}{e^{-2}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}+o(e^{-n})}}=e^2$;
ai bordi dell'intervallo ho le serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\left(e^{-n}\right)-1\right)e^{2n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\cos\left(e^{-n}\right)-1\right)e^{2n}$, che non sono infinitesime perché $\frac{\cos\left(e^{-n}\right)-1}{e^{-2n}}\overset{n\to\infty}{\to}-\frac{1}{2}$; dunque, l'intervallo di convergenza è $\left(-e^2,e^2\right)$.

(k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4\log n}}{x^n}$: posto $y=\frac{1}{x}$, ottengo $\sum_{n=1}^{\infty}n^{4\log n}y^n$ il cui raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{4\log n}}}=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}n^{\frac{4\log n}{n}}}=$

$= \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} e^{\log\left(n^{\frac{4\log n}{n}}\right)}} = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} e^{\frac{4\log^2 n}{n}}} = 1$; agli estremi del dominio ho $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{4\log n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{4\log n}$ che non convergono perché il termine n-esimo non va a 0; dunque, la serie converge per $x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \int_{\sqrt{n}-1}^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt$: essendo e^{-t^2} una funzione decrescente, ho che $e^{-\sqrt{n}^2} \le \displaystyle\int_{\sqrt{n}-1}^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \le e^{-(\sqrt{n}-1)^2}$, e quindi $e = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} e^{-\frac{-n+2\sqrt{n}-1}{n}}} =$ $= \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{-n+2\sqrt{n}-1}}} \le \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_{\sqrt{n}-1}^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt}} \le$ $\le \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{-n}}} = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} e^{-\frac{n}{n}}} = e$, dunque la serie ha raggio di convergenza e; agli estremi dell'intervallo non c'è convergenza perché se serie corrispondenti non sono infinitesime in quanto $e^n \displaystyle\int_{\sqrt{n}-1}^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \ge$ $\ge e^n e^{-n} = 1$; dunque, l'intervallo di convergenza è $(-e,e)$.

2. $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to 0} \frac{\sin\left(x^2y^3\right)}{x^2+y^6}$ e $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{\sin\left(x^2y^3\right)}{x^2+y^6}$ sono entrambi 0, perché $\left|\dfrac{\sin\left(x^2y^3\right)}{x^2+y^6}\right| \le$ $\le \dfrac{x^2|y|^3}{x^2+y^6} \le |y|^3 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$, e inoltre $\left|\dfrac{\sin\left(x^2y^3\right)}{x^2+y^6}\right| \le \dfrac{1}{x^2+y^6} \overset{|(x,y)|\to\infty}{\to} 0$.

3. $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2y^{\frac{6}{7}}z}{x^4+y^4+z^2} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ è chiaramente differenziabile in tutti i punti diversi dall'origine; inoltre, nell'origine è continua perché $\left|\dfrac{h^2k^{\frac{6}{7}}j}{h^4+k^4+j^2}\right| = \dfrac{\left(h^4\right)^{\frac12}|k|^{\frac67}\left(j^2\right)^{\frac12}}{h^4+k^4+j^2} \le \dfrac{\left(h^4+k^4+j^2\right)^{\frac12}|k|^{\frac67}\left(h^4+k^4+j^2\right)^{\frac12}}{h^4+k^4+j^2} =$ $= |k|^{\frac67} \overset{(h,k,j)\to(0,0,0)}{\to} 0$, ha le derivate direzionali tutte e tre nulle perché è nulla lungo gli assi, ha anche tutte le derivate direzionali, anch'esse nulle, perché $\displaystyle\lim_{t\to0^+} \frac{f(th,tk,tj)-f(0,0,0)}{t} = \lim_{t\to0^+} \frac{t^{\frac{27}{7}}h^2k^{\frac67}j}{t^5h^4+t^5k^4+t^3j^2} =$ $= \displaystyle\lim_{t\to0^+} t^{\frac67}\frac{h^2k^{\frac67}j}{t^2h^4+t^2k^4+j^2} = 0\ \forall(h,j,k)\in\mathbb{R}^3$; tuttavia, la funzione non è differenziabile perché la quantità $\dfrac{f(h,k,j)-f(0,0,0)-\langle\nabla f(0,0,0),(h,k,j)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2+j^2}} =$ $= \dfrac{h^2k^{\frac67}j}{\left(h^4+k^4+j^2\right)\sqrt{h^2+k^2+j^2}}$, se calcolata lungo la direzione $\left(h,h,h^2\right)$, vale $\dfrac{h^{\frac{34}{7}}}{3h^4\sqrt{2h^2+h^4}} = \pm\dfrac{h^{-\frac17}}{3\sqrt{2+h^2}} \overset{h\to0}{\to} \pm\infty$.

4. $f(x,y) = \left(x^2-y^2\right)^2\left(y-x^2\right)$: $\nabla f(x,y) = \Big(4x\left(x^2-y^2\right)\left(y-x^2\right) - 2x\left(x^2-y^2\right)^2,$

$-4y\left(x^2-y^2\right)\left(y-x^2\right)+\left(x^2-y^2\right)^2\Big)=\left(2x\left(x^2-y^2\right)\left(2\left(y-x^2\right)-\left(x^2-y^2\right)\right),\right.$
$\left(x^2-y^2\right)\left(-4y\left(y-x^2\right)+\left(x^2-y^2\right)\right)\Big)$ si annulla in tutti i punti tali che $x^2=y^2$ e in quelli in cui $2x\left(2\left(y-x^2\right)-\left(x^2-y^2\right)\right)=0=-4y\left(y-x^2\right)+$ $+\left(x^2-y^2\right)$: se $x=0$, nell'altra equazione troviamo $y=0$, ma abbiamo già contato l'origine all'interno dei punti in cui $x^2=y^2$; altrimenti, abbiamo che $2\left(y-x^2\right)=x^2-y^2=4y\left(y-x^2\right)$, ovvero $y=\frac{1}{2}$ e $x=\pm\sqrt{\frac{5}{12}}$, perché se fosse $y-x^2=0$ avremmo anche $x^2-y^2=0$, caso che abbiamo già considerato. Studiando il segno della funzione notiamo che i punti appartenenti alle rette $y=x$ e $y=-x$ con $0<y<1$ sono di minimo, perché in quei punti la funzione si annulla mentre intorno è positiva, mentre i punti delle due rette tali che $y\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ sono di massimo perché la funzione è negativa in ogni intorno e i punti $(0,0)$ e $(\pm1,1)$ sono selle perché la funzione cambia segno; per quanto riguarda i punti $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{12}},\frac{1}{2}\right)$, notiamo che gli insiemi $\left\{x\geq y\geq x^2\right\}$ e $\left\{-x\geq y\geq x^2\right\}$ sono dei compatti in cui la funzione è nulla sul bordo e positiva all'interno, pertanto essendo questi due gli unici punti stazionari rispettivamente del primo e del secondo insieme, saranno entrambi di massimo.

5. $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}\overset{n\to\infty}{\to}0$, perché $f_n(0)=0$ e se $x\neq0$ allora $f_n(x)\leq\frac{nx}{n^2x^2}=$ $=\frac{1}{nx}\to0$. Per studiare la convergenza uniforme, calcoliamo innanzi tutto $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|$: $f_n'(x)=\frac{n-n^3x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^2}$ si annulla in $x=\pm\frac{1}{n}$ e $f_n\left(\pm\frac{1}{n}\right)=\pm\frac{1}{2}$, dunque essendo $\lim_{x\to\pm\infty}f_n(x)=0$ ho che $\sup_{x\in\mathbb{R}}f_n(x)=\frac{1}{2}$ e quindi la convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$. Tuttavia, c'è convergenza uniforme in ogni insieme del tipo $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$, perché $\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}|f_n(x)|\leq$
$\leq\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)}\frac{1}{|nx|}=\frac{1}{n\delta}\to0$