**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini**

**Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli**

Soluzioni del tutorato numero 5 (23 Ottobre 2009)

Massimi e minimi, formula di Taylor, integrali con parametro

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo: *http://www.lifedreamers.it/liuck*

1. (a) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2-2y^2-2x^2y^2$: $\nabla f(x,y)=\big(4x^3-4x-4xy^2,\ 4y^3-4y-4x^2y\big)$ si annulla se e solo se $4x\left(x^2-y^2-1\right)=0=4y\left(y^2-x^2-1\right)$, dunque in $(0,0)$, $(\pm1,0)$ e $(0,\pm1)$. Essendo $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2-4y^2-4 & -8xy\\ -8xy & 12y^2-4x^2-4\end{pmatrix}$, abbiamo che $H_f(0,0)=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$ e quindi $(0,0)$ è un punto di massimo locale, mentre $H_f(\pm1,0)=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}$ e $H_f(0,\pm1)=\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$, dunque gli altri quattro punti sono tutti di sella.

   (b) $f(x,y)=(x+y)^2(y-2)$: $\nabla f(x,y)=(2(x+y)(y-2),(x+y)(x+3y-4))$ si annulla in tutti e soli i punti della forma $(x,-x)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Studiando il segno della funzione ricaviamo che $f(x,-x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$, e che se $x<-2$ intorno a $(x,-x)$ la funzione ha segno positivo, dunque i punti stazionari in cui $x<-2$ sono di massimo; analogamente, se $x>-2$ la funzione assume valori negativi intorno a $(x,-x)$ e pertanto questi sono tutti punti di minimo; infine, il punto $(-2,2)$ è una sella perchè in qualsiasi suo intorno la funzione cambia segno.

   (c) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-x^2y^2$: $\nabla f(x,y,z)=\big(2x-2xy^2,2y-2x^2y,2z\big)$ si annulla in $(0,0,0)$, $(\pm1,1,0)$ e $(\pm1,-1,0)$. La matrice Hessiana è $H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2-2y^2 & -4xy & 0\\ -4xy & 2-2x^2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, dunque $H_f(0,0,0)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ è definita positiva e quindi l'origine è un massimo, mentre $H_f(\pm1,\pm1,0)=\begin{pmatrix}0&-4&0\\-4&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ ha per autovalori 2 e $\pm4$ e quindi i punti $(1,1,0)$ e $(-1,-1,0)$ sono selle; infine $H_f(\pm1,\mp1,0)=\begin{pmatrix}0&4&0\\4&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ ha anch'essa per autovalori 2 e $\pm4$ e dunque anche questi due punti sono di sella.

   (d) $f(x,y)=\displaystyle\int_0^1 e^{(x^2+y^2)t^2}dt$: fissato $t\in\mathbb{R}$, la funzione $e^{(x^2+y^2)t^2}$ è di classe $C^1$, dunque essendo l'intervallo di integrazione limitato ho che

$\nabla f(x,y) = \left(\int_0^1 2xt^2 e^{(x^2+y^2)t^2} dt, \int_0^1 2yt^2 e^{(x^2+y^2)t^2} dt\right)$; pertanto, essendo $\int_0^1 t^2 e^{(x^2+y^2)t^2} dt > 0 \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'unico punto stazionario è l'origine. Inoltre, essendo $f(x,y) = \int_0^1 e^{(x^2+y^2)t^2} dt \geq \int_0^1 1 dt = 1 =$ $= f(0,0)$, il punto $(0,0)$ è di minimo.

2. Notiamo innanzi tutto che $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq \left(x^2-1\right)^2\right\}$, dunque la funzione è sempre positiva all'interno dell'insieme e nulla sul bordo, dunque $\min_A f = f|_{\partial A} = 0$; inoltre, essendo $f$ continua e $A$ compatto, la funzione ammette sicuramente massimo su questo insieme, ma per quanto detto in precedenza il massimo sarà raggiunto all'interno di $A$, e dunque in un punto stazionario. $\nabla f(x,y) = \left(4x^4 - 4x, 2y\right)$ si annulla in $(0,0)$ e $(\pm 1, 0)$, ma l'unico di questi tre punti che si trova all'interno di $A$ è l'origine, quindi $\max_A f = f(0,0) = 1$.

3. (a) $f(x,y) = e^{x^2-y}$: $\nabla f(x,y) = \left(2xe^{x^2-y}, -e^{x^2-y}\right)$, $H_f(x,y) =$
$$= \begin{pmatrix} \left(4x^2+2\right)e^{x^2-y} & -2xe^{x^2-y} \\ -2xe^{x^2-y} & e^{x^2-y} \end{pmatrix}, \text{ dunque } f(x,y) = f(0,0) +$$
$$+ \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle + \frac{1}{2}\langle (x,y), H_f(0,0)(x,y) \rangle + o\left(x^2+y^2\right) =$$
$$= 1 + \langle (0,-1), (x,y) \rangle + \frac{1}{2}\left\langle (x,y), \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(x,y) \right\rangle + o(x^2+y^2) =$$
$$= 1 - y - x^2 + \frac{y^2}{2} + o\left(x^2+y^2\right).$$

   (b) $f(x,y) = \arctan(x+y)$: $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{(x+y)^2+1}, \frac{1}{(x+y)^2+1}\right)$,
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2(x+y)}{((x+y)+1)^2} & \frac{2(x+y)}{((x+y)+1)^2} \\ \frac{2(x+y)}{((x+y)+1)^2} & \frac{2(x+y)}{((x+y)+1)^2} \end{pmatrix}, \text{ dunque } \nabla f(0,0) = (1,1) \text{ e}$$
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ e quindi } f(x,y) = x + y + o\left(x^2+y^2\right).$$

4. (a) Posta $G(y,z) = \int_z^y \sin\left(x^2\right) dx$ e $\gamma(t) = \left(t^4, t^2\right)$, abbiamo che $f(t) = G(\gamma(t))$, dunque $f'(t) = \langle \nabla G(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle$, ma per il teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo che $\nabla G(y,z) = \left(\sin\left(y^2\right), -\sin\left(z^2\right)\right)$, dunque $f'(t) = \left\langle \left(\sin\left(t^4\right), -\sin\left(t^8\right)\right), \left(4t^3, 2t\right) \right\rangle = 4t^3 \sin\left(t^4\right) - 2t \sin\left(t^8\right)$.

   (b) Posta $G(y,z,w) = \int_z^y e^{-x^2 w} dx$ e $\gamma(t) = \left(t^3, t, t^2\right)$, abbiamo che $f(t) = G(\gamma(t))$, dunque $f'(t) = \langle \nabla G(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle$; inoltre, $\frac{\partial}{\partial w} e^{-x^2 w} = -x^2 e^{-x^2 w}$ esiste per ogni $w$ fissato, e per $w \in [w_0 - \delta, w_0 + \delta]$ ho che $\left| \int_z^y -x^2 e^{-x^2 w} dx \right| \leq$ $\leq \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2(|w_0|+\delta)} dx < +\infty$, dunque posso derivare sotto il segno di integrale e quindi $\nabla G(y,z,w) = \left(e^{y^2 w}, -e^{z^2 w}, \int_z^y -x^2 e^{x^2 w} dx\right)$; pertanto, $f'(t) = \left\langle \left(e^{t^8}, -e^{t^4}, \int_t^{t^3} e^{-t^2 x^2} dx\right), (3t^2, 1, 2t) \right\rangle = 3t^2 e^{t^8} - -e^{t^4} + 2t \int_t^{t^3} e^{-t^2x^2} dx$.

5. $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x} dx$.

   (a) Notiamo innanzi tutto che $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{e^{x(1-t)} - 1}{x} dx$, dunque l'integranda non ha un asintoto nell'origine per nessun valore di $t$, in quanto $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-x} \frac{e^{x(1-t)} - 1}{x} = 1 - t$, quindi la convergenza dell'integrale dipenderà solamente dal comportamento all'infinito dell'integranda: sicuramente per $t < 0$ la funzione non è definita perché $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x} dx = +\infty$, se $t > 0$ l'integrale converge perché ha lo stesso comportamento di $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} dx$ e in $t = 0$ l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ si comporta come $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}$ e dunque diverge; quindi, l'insieme di definizione di $f$ è $(0, +\infty)$.

   (b) Innanzi tutto, $f$ è continua perché se $t \in [\tau, +\infty)$, allora $|f(t)| \leq \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{e^{-\tau x} - e^{-x}}{x}\right| dx < +\infty$ e dunque c'è equidominatezza e si può applicare il teorema di continuità sotto integrale. Inoltre, $\displaystyle\frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x} = -e^{-tx}$ e quindi per $t \in [\tau, +\infty)$ abbiamo che $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} -e^{-tx} dx\right| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|e^{-\tau x}\right| dx < +\infty$, quindi la funzione è $C^1$ e $f'(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -e^{-tx} dx = \left[\frac{e^{-tx}}{t}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{t}$.

   (c) $f(t) - f(1) = \displaystyle\int_1^t f'(s) ds = \int_1^t -\frac{ds}{s} = -\log t$, ma essendo $f(1) = = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0 dx = 0$, ho che $f(t) = -\log t$.