Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 3 (9 Ottobre 2009)
Derivazione in più variabili

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è chiaramente differenziabile all'infuori dell'origine. In $(0,0)$ ammette derivate parziali entrambe nulle, perché essendo $f(x,0) = 0 = f(0,y)\ \forall x, y$, allora $\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0 = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$; inoltre, la funzione ha derivate direzionali perché $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^3hk^2}{t\left(t^2h^2 + t^4k^4\right)} = = \lim_{t \to 0^+} \frac{hk^2}{h^2 + t^2k^4} = \begin{cases} \frac{k^2}{h} & \text{se } h \neq 0 \\ 0 & \text{se } h = 0 \end{cases}$; tuttavia, la funzione non è differenziabile perché $\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0) - (h,k) \rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} = = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{hk^2}{\left(h^2+k^4\right)\sqrt{h^2+k^2}}$, che va a $+\infty$ se $h = k^2$.

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log\left(1+x^2y^2\right)}{x^8+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è ovviamente differenziabile in $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$. Nell'origine esistono entrambe le derivate parziali, nulle, perché la funzione è nulla lungo gli assi; inoltre, è differenziabile (e ha dunque derivate direzionali) perché

   $$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \left| \frac{f(h,k) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0) - (h,k) \rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \left| \frac{\log\left(1+h^2k^2\right)}{\left(h^8+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}} \right| =$$
   $$= \lim_{(h,k) \to (0,0)} \left| \frac{h^2k^2}{\left(h^8+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}} \right| \le \lim_{(h,k) \to (0,0)} \left| \frac{\left(h^2+k^2\right)\left(h^8+k^2\right)}{\left(h^8+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}} \right| =$$
   $$= \lim_{(h,k) \to (0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0.$$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{1}{x^4+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ammette derivate parziali entrambe nulle nell'origine, perché $f(0,y) = 0; \forall y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \sqrt[3]{h} \sin\left(\frac{1}{h^4}\right) = 0$; inoltre, f è differenziabile (e dunque ammette derivate direzionali) perché

   $$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \left| \frac{f(h,k) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0) - (h,k) \rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \left| \frac{h^{\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{1}{h^4+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \le$$

$$\leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{h^2+k^2}\,h^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt[3]{h} = 0.$$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è parzialmente derivabile nell'origine, perché $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^{h^2}-1}{h^2}-1}{h} =$
$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}-1-h^2}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{2he^{h^2}-2h}{3h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{2e^{h^2}-2}{3h} = \lim_{h\to 0} \frac{4he^{h^2}}{3} = 0$
e analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{e^{k^2}-1}{k^2}-1}{k} = 0$. Inoltre, la funzione è differenziabile (e quindi possiede derivate direzionali) perché
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{e^{h^2+k^2}-1}{h^2+k^2}-1}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\frac{e^{\rho^2}-1}{\rho^2}-1}{\rho} = 0.$$

(e) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2yz^2}{x^4+y^4+z^4} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$ ha derivate parziali tutte nulle nell'origine perché nulla lungo gli assi, inoltre è dotata di derivate direzionali perché $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(th,tk,tj)-f(0,0,0)}{t} =$
$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2h^2tkt^2j^2}{t\left(t^4h^4+t^4k^4+t^4j^4\right)} = \frac{h^2jk^2}{h^4+k^4+j^4}$, ma non é differenziabile perché
$$\lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)} \frac{h^2kj^2}{\left(h^4+k^4+j^4\right)\sqrt{h^2+k^2+j^2}} \text{ vale } \pm\frac{1}{3\sqrt{3}} \text{ se } h=k=j.$$

2. (a) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ può essere anch'essa estesa ad una funzione continua nell'origine con $f(0,0)=0$, in quanto $|f(x,y)| \leq \frac{\left(x^4+y^2\right)y^2}{x^2+y^4} =$
$= y^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$; inoltre, essendo nulla lungo gli assi cartesiani, f possiede anche derivate parziali nell'origine; tuttavia, solamente $\frac{\partial f}{\partial y}$ è continua nell'origine, infatti $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|\frac{2x^2y\left(x^2+y^4\right)-4x^2y^5}{\left(x^2+y^4\right)^2}\right| \leq$
$\leq \frac{2x^2|y|\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2} + \frac{4x^2|y|^5}{\left(x^2+y^4\right)^2} \leq \frac{2|y|\left(x^2+y^4\right)\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2} +$
$+ \frac{4|y|\left(x^2+y^4\right)\left(x^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^4\right)^2} = 6|y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$, ma $\frac{\partial f}{\partial x} =$
$= \frac{2xy^2\left(x^2+y^4\right)-2x^3y^2}{\left(x^2+y^4\right)^2}$ e quest'ultima quantità non è continua perché, calcolata lungo la curva $x=y^2$, vale $\frac{4y^8-2y^8}{4y^8} = \frac{1}{2}$.

(b) $f(x,y) = \frac{x^4y}{x^2+y^6}$ può essere estesa ad una funzione continua anche nell'origine con $f(0,0)=0$, perché $|f(x,y)| \leq \frac{x^2|y|\left(x^2+y^6\right)}{x^2+y^6} =$

$= x^2|y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$; la funzione ammette inoltre derivate parziali entrambe nulle nell'origine perché $f(x,0) = 0 = f(0,y)$, mentre negli altri punti si ha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{4x^3y\left(x^2+y^6\right) - 2x^5y}{\left(x^2+y^6\right)^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$ $= \dfrac{x^4\left(x^2+y^6\right) - 6x^4y^6}{\left(x^2+y^6\right)^2}$, e sono entrambe continue nell'origine perché $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \le \left|\dfrac{4x^3y\left(x^2+y^6\right)}{\left(x^2+y^6\right)^2}\right| + \left|\dfrac{2x^5y}{\left(x^2+y^6\right)^2}\right| \le \dfrac{4|xy|\left(x^2+y^6\right)^2}{\left(x^2+y^6\right)^2} +$ $+ \dfrac{2|xy|\left(x^2+y^6\right)^2}{\left(x^2+y^6\right)^2} = 6|xy| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ e $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le \left|\dfrac{x^4\left(x^2+y^6\right)}{\left(x^2+y^6\right)^2}\right| +$ $+ \left|\dfrac{6x^4y^6}{\left(x^2+y^6\right)^2}\right| \le \dfrac{x^2\left(x^2+y^6\right)^2}{\left(x^2+y^6\right)^2} + \dfrac{6y^6\left(x^2+y^6\right)^2}{\left(x^2+y^6\right)^2} = x^2 + 6y^6 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$; quindi, la funzione può essere prolungata ad una funzione di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$.

3. $f(x,y) = x^2e^{xy^3}, \gamma(t) = (\cos t, t) \Rightarrow f(\gamma(t)) = \cos^2(t)e^{\cos(t)t^3} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}f(\gamma(t)) =$
$= -2\sin(t)\cos(t)e^{\cos(t)t^3} + \cos^2(t)\left(3t^2\cos(t) - t^3\sin(t)\right)e^{\cos(t)t^3} =$
$= \left(3t^2\cos^3(t) - t^3\sin(t)\cos^2(t) - 2\sin(t)\cos(t)\right)e^{\cos(t)t^3}$. Inoltre, $\nabla f(x,y) =$
$= \left(2xe^{xy^3} + x^2y^3e^{xy^3}, 3x^3y^2e^{xy^3}\right)$, dunque $\langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle =$
$= \left\langle \left(2\cos(t)e^{\cos(t)t^3} + \cos^2(t)t^3e^{\cos(t)t^3}, 3\cos^3(t)t^2e^{\cos(t)t^3}\right), (-\sin t, 1)\right\rangle =$
$= -2\sin(t)e^{\cos(t)t^3} - \sin(t)\cos^2(t)t^3e^{\cos(t)t^3} + 3\cos^3(t)t^2e^{\cos(t)t^3} =$
$= \left(3t^2\cos^3(t) - t^3\sin(t)\cos^2(t) - 2\sin(t)\cos(t)\right)e^{\cos(t)t^3}$.

4. Esibire un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che nell'origine sia:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ è chiaramente continua, è dotata di tutte le derivate direzionali in quanto $\lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{|t|\sqrt{h^2+k^2}}{t} =$ $= \sqrt{h^2+k^2}$, ma non ha derivate parziali perché $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{|h|}{h}$ non esiste (e analogamente si dimostra che non esiste neanche l'altra derivata parziale).

   (b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ è chiaramente continua, ammette derivate parziali nulle perché è nulla lungo gli assi, ma non ha le derivate direzionali (ad eccezione delle direzioni degli assi) perché $\lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} =$ $= \lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{\sqrt[3]{t^2xy}}{t} = \lim\limits_{t\to0^+} \sqrt[3]{\dfrac{hk}{t}} = +\infty$.

   (c) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}$ è chiaramente continua nell'origine, ma non ammette derivate parziali perché $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = \pm\infty$ (analogamente non ha l'altra derivata parziale); inoltre, non possiede alcuna derivata direzionale perché $\lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{t^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{h^2+k^2}}{t} =$

$$= \lim_{t\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{h^2+k^2}{t}} = +\infty.$$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \\ 1 & \text{se } (x,y) \in A \end{cases}$, ove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2, x \neq 0\}$,

non è continua nell'origine perché $f(x,x^2) = 1 \overset{x\to 0}{\not\to} 0$, ammette derivate parziali entrambe nulle perché è nulla lungo gli assi, e ha anche le derivate direzionali perché $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{0}{t} = 0$, dato che per t sufficientemente piccolo si ha $f(tx,ty) = 0$.

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{xy} & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \\ 1 & \text{se } (x,y) \in A \end{cases}$ ove

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2, x \neq 0\}$, è discontinua nell'origine perché $f(x,x^2) = 1$, ha derivate parziali nulle perché è nulla lungo gli assi, ma non ha le derivate direzionali perché $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{t^2xy}}{t} =$

$= \lim_{t\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{hk}{t}} = +\infty$, dato che per t abbastanza piccolo si ha $f(tx,ty) = \sqrt[3]{t^2xy}$.

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \\ 1 & \text{se } (x,y) \in A \end{cases}$, ove

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2, x \neq 0\}$, non è continua, perché non lo è lungo la parabola A, non ha le derivate parziali perché lungo gli assi vale rispettivamente $|x|$ e $|y|$, ma ha tutte le derivate direzionali perché $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{|t|\sqrt{h^2+k^2}}{t} = \sqrt{h^2+k^2}$, dato che per t opportunamente piccolo si ha $f(tx,ty) = |t|\sqrt{x^2+y^2}$.