Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 12 (18 Dicembre 2009)
Equazioni differenziali

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $\ddot{x} + x = e^t$: il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ che ha per radici $\pm i$, dunque l'omogenea associata ha per soluzioni $c_1 \cos t + c_2 \sin t$: troviamo una soluzione particolare del tipo $\bar{x}(t) = ae^t \Rightarrow \ddot{\bar{x}}(t) + x(t) = 2ae^t$, dunque ho una soluzione particolare per $a = \frac{1}{2}$ e quindi l'integrale generale dell'equazione è $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{e^t}{2}$

   (b) $\dddot{x} - 2\dot{x} - 4x = 1$: il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - 4$ ha per radici 2 e $1 \pm i$, quindi l'omogenea associata ha per soluzioni $c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \cos t + c_3 e^{-t} \sin t$; cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{x} = a \Rightarrow \dddot{\bar{x}} - 2\dot{\bar{x}} - 4\bar{x} = -\frac{a}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$, quindi l'integrale generale dell'equazione è $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \cos t + c_3 e^{-t} \sin t - \frac{1}{4}$.

   (c) $\dddot{x} + \ddot{x} - \dot{x} - x = e^t$: $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$, dunque l'omogenea associata ha per soluzione $c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 te^{-t}$: cerchiamo una soluzione particolare del tipo $x(t) = ate^t$: $\dddot{\bar{x}} + \ddot{\bar{x}} - \dot{\bar{x}} - \bar{x} =$ $= a(t + 3)e^t + a(t + 2)e^t - a(t + 1)e^t - ate^t = 4ae^t \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow x(t) =$ $= c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 te^{-t} + \frac{te^t}{4}$ è l'integrale generale.

   (d) $\ddddot{x} + 2\ddot{x} + x = t \sin t$: $P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda + 1)^2$, dunque l'omogenea associata ha per soluzioni $x(t) = c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \sin t + c_3 t \sin t$; cerchiamo ora una soluzione particolare del tipo $\bar{x}(t) = at^3 \cos t + bt^2 \cos t +$ $+ct^3 \sin t + dt^2 \sin t \Rightarrow \ddddot{\bar{x}} - 2\ddot{\bar{x}} + \bar{x} = at^3 \cos t + (b - 12c)t^2 \cos t - (8d+$ $+36a)t \cos t + (24c - 12b) \cos t + ct^3 \sin t + (12a + d)t^2 \sin t + (8b-$ $-36c)t \sin t + (24a - 12d) \sin t - 2at^3 \cos t + (12c - 2b)t^2 \cos t + (12a+$ $+8d)t \cos t + 4b \cos t - 2ct^3 \sin t - (12a + 2d)t^2 \sin t + (12c - 8b)t \sin t+$ $+4d \sin t + at^3 \cos t + bt^2 \cos t + ct^3 \sin t + dt^2 \sin t = -24at \cos t + (24c-$ $-8b) \cos t - 24ct \sin t(24a - 8d) \sin t \Rightarrow (a, b, c, d) = \left(0, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{24}, 0\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \bar{x}(t) = -\frac{t^3 \sin t}{24} - \frac{t^2 \cos t}{8} \Rightarrow x(t) = c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \sin t + c_3 t \sin t-$ $-\frac{t^3 \sin t}{24} - \frac{t^2 \cos t}{8}$ è l'integrale generale.

2. (a) $\begin{cases} \ddot{x} + 3x = \cos(3t) \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^2 + 3$, dunque l'omogenea associata ha per soluzioni $c_1 \cos\left(\sqrt{3}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{3}t\right)$; cerchiamo una soluzione

particolare del tipo $\bar{x}(t) = a\cos(3t) + b\sin(3t)$: $\ddot{\bar{x}} + 3\bar{x} = -9a\cos(3t) - 9b\sin(3t) + a\cos(3t) + b\sin(3t) = -8a\cos(3t) - 8b\sin(3t) \Rightarrow \bar{x}(t) = = -\frac{\cos(3t)}{8}$, dunque l'integrale generale è $c_1\cos\left(\sqrt{3}t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{3}t\right) - \frac{\cos(3t)}{8}$; imponiamo ora le condizioni iniziali:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}(0) = -\sqrt{3}c_1\sin\left(\sqrt{3}\cdot 0\right) + \sqrt{3}d_2\cos\left(\sqrt{3}\cdot 0\right) + \frac{3}{8}\sin(3\cdot 0) = \sqrt{3}c_2 = 0 \\ x(0) = c_1 - \frac{1}{8} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow (c_1, c_2) = \left(\frac{7}{8}, 0\right) \Rightarrow x(t) = \frac{7}{8}\cos\left(\sqrt{3}t\right) - \frac{\cos(3t)}{8}$.

(b) $\left\{\begin{array}{l} \ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = e^{-3t} \\ \dot{x}(0) = 2 \\ x(0) = 0 \end{array}\right.$: $P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2$, dunque l'omogenea associata ha per soluzioni $c_1e^{-3t} + c_2te^{-3t}$; cerchiamo ora una soluzione del tipo $\bar{x}(t) = at^2e^{-3t} \Rightarrow \ddot{\bar{x}} + 6\dot{\bar{x}} + 9\bar{x} = a\left(9t^2 - 12t + 2\right)e^{-3t} + 6a(2t - 3t^2)\,e^{-3t} + 9at^2e^{-3t} = 2ae^{-3t} \Rightarrow \bar{x}(t) = \frac{t^2e^{-3t}}{2}$, quindi l'integrale generale è $c_1e^{-3t} + c_2te^{-3t} + \frac{t^2e^{-3t}}{2}$; imponiamo ora i dati iniziali:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}(0) = -3c_1e^{-3\cdot 0} + c_2(1 - 3\cdot 0)e^{-3\cdot 0} + \left(0 - \frac{3}{2}0^2\right)e^{-3\cdot 0} = -2c_2 = -2 \\ x(0) = c_1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow (c_1, c_2) = (0, -1) \Rightarrow x(t) = \frac{t^2}{2}e^{-3t} - te^{-3t}$.

(c) $\left\{\begin{array}{l} \dddot{x} - 6\ddot{x} + 11\dot{x} - 6x = 6e^{4t} \\ \ddot{x}(0) = 30 \\ \dot{x}(0) = 10 \\ x(0) = 4 \end{array}\right.$: $P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$, quindi le soluzioni dell'omogenea sono $c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{3t}$; cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{x}(t) = ae^{4t} \Rightarrow \dddot{\bar{x}} - 6\ddot{\bar{x}} + 11\dot{\bar{x}} - 6\bar{x} = = 64ae^{4t} - 96ae^{4t} + 44e^{4t} - 6e^{4t} = 6e^{4t} \Rightarrow \bar{x}(t) = e^{4t}$; imponiamo ora i dati iniziali:

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot{x}(0) = c_1e^0 + 4c_2e^{2\cdot 0} + 9c_3e^{3\cdot 0} + 16e^{4\cdot 0} = c_1 + 4c_2 + 9c_3 + 16 = 30 \\ \dot{x}(0) = c_1e^0 + 2c_2e^{2\cdot 0} + 3c_3e^{3\cdot 0} + 4e^{4\cdot 0} = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4 = 10 \\ x(0) = c_1 + c_2 + c_3 + 1 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$(c_1, c_2, c_3) = (1, 1, 1) \Rightarrow x(t) = e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t}$.

3. (a) $\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = \left\{\begin{array}{ll} x\log|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{array}\right. \\ x(0) = x_0 \end{array}\right.$: innanzi tutto, se $x_0 = 0$ oppure $x_0 = \pm 1$ la soluzione del problema è costante $x(t) \equiv x_0$, perché questi sono gli zeri della funzione $x\log|x|$; altrimenti determiniamo la soluzione per separazione di variabili: $t = \int_0^t ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x\log|x|} = \log|\log|x(t)|| - \log|\log|x_0|| \Rightarrow \log|\log|x(t)|| = t + \log|\log|x_0|| \Rightarrow |\log|x(t)|| = = |\log|x_0||e^t \Rightarrow \log|x(t)| = \log|x_0|e^t \Rightarrow |x(t)| = |x_0|^{e^t} \Rightarrow x(t) = sign(x_0)|x_0|^{e^t}$, ove i moduli sono stati tolti tenendo conto del dato iniziale. Comunque prendo $x_0 \in \mathbb{R}$, soluzione è definita $\forall t \in \mathbb{R}$, dunque l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è $(-\infty, +\infty)$.

(b) $\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = x^3 - x \\ x(0) = x_0 \end{array}\right.$: la soluzione è costante $x(t) \equiv x_0$ se $x_0 = 0$ oppure

$x_0 = \pm 1$, altrimenti la determiniamo per separazione di variabili:
$t = \int_0^t ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^3 - x} = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x-1} - \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} =$
$= \frac{\log|x(t)-1|}{2} - \frac{\log|x_0-1|}{2} + \frac{\log|x(t)+1|}{2} - \frac{\log|x_0+1|}{2} - \log|x(t)| +$
$+ \log|x_0| = \frac{\log\left|\frac{x(t)^2-1}{x(t)^2}\right|}{2} - \frac{\log\left|\frac{x_0^2-1}{x_0^2}\right|}{2} \Rightarrow \log\left|\frac{x(t)^2-1}{x(t)^2}\right| = \log\left|\frac{x_0^2-1}{x_0^2}\right| +$
$+2t \Rightarrow \left|\frac{x(t)^2-1}{x(t)^2}\right| = \left|\frac{x_0^2-1}{x_0^2}\right| e^{2t} \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2(t)} = \frac{x(t)^2-1}{x(t)^2} = \frac{x_0^2-1}{x_0^2}e^{2t} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{x^2(t)} = 1 - \frac{x_0^2-1}{x_0^2}e^{2t} = \frac{x_0^2 - \left(x_0^2-1\right)e^{2t}}{x_0^2} \Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - \left(x_0^2-1\right)e^{2t}}}$:
questa soluzione è definita fin tanto che l'argomento della radice è positivo, ovvero $x_0 > \left(x_0^2 - 1\right)e^{2t}$: se $|x_0| \leq 1$ il termine a destra non è mai positivo e dunque la condizione è sempre verificata, cioè l'intevallo massimale di esistenza è $(-\infty, +\infty)$; altrimenti, la condizione è vera $\Leftrightarrow e^{2t} < \frac{x_0^2}{x_0^2-1} \Leftrightarrow t < \log\sqrt{\frac{x_0^2}{x_0^2-1}}$, e dunque l'intervallo massimale di esistenza è $\left(-\infty, \log\sqrt{\frac{x_0^2}{x_0^2-1}}\right)$

4. (a) $\begin{cases} \dot{x} = |x| \arctan\left(e^x\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$: l'unico punto di equilibrio del sistema è l'origine, perché la funzione $|x|\arctan(e^x)$ si annulla solo in $x = 0$. Inoltre, $||x|\arctan(e^x)| \leq \frac{\pi}{2}|x|$, e dunque le soluzioni sono definite per tutti i tempi per qualsiasi scelta del dato iniziale.

   (b) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$: i punti di equilibrio sono gli zeri della funzione $x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, ovvero $x = 0$ e $x = \frac{1}{k\pi}$ per $k \in \mathbb{Z}$. Se $|x_0| \leq \frac{1}{\pi}$, il dato iniziale si trova in mezzo a due punti di equilibrio e dunque la soluzione è definita per tutti i tempi; se invece $x_0 > \frac{1}{\pi}$, l'intervallo massimale è $\left(\int_{\frac{1}{\pi}}^{x_0} \frac{dx}{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}, \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$, che è illimitato a sinistra ma non a destra in quanto $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \approx \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$; analogamente, se $x_0 < -\frac{1}{\pi}$ l'intervallo massimale $\left(\int_{-\infty}^{x_0} \frac{dx}{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}, \int_{x_0}^{\frac{1}{\pi}} \frac{dx}{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$ è illimitato a destra e limitato a sinistra.

5. $(\dot{x}, \dot{y}) = -\nabla F(x, y)$

   (a) Se $\nabla F(x_0, y_0) = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di equilibrio e quindi $\nabla F(x(t), y(t)) = \nabla F(x_0, y_0) = 0$, in particolare è vero passando al

$t \to +\infty$; viceversa, $\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) = \langle \nabla F(x(t), y(t)), (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \rangle =$
$= \langle \nabla F(x(t), y(t)), -\nabla F(x(t), y(t)) \rangle = -\|\nabla F(x(t), y(t))\|^2 < 0$, dunque $t \to F(x(t), y(t))$ è una funzione decrescente e inferiormente limitata e pertanto avrà un asintoto orizzontale e quindi $-\|\nabla F(x(t), y(t))\|^2 =$
$= \frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) \overset{t\to+\infty}{\to} 0$, ovvero $\|\nabla F(x(t), y(t))\| \overset{t\to+\infty}{\to} 0$.

(b) $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y \\ \dot{y} = -2x - 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2x + 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x, y) = x^2 + 2xy + g_1(y) \\ F(x, y) = 2xy + 2y^2 + g_1(x) \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow F(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 = (x + y)^2 + y^2 \geq 0$ e quindi in particolare F è limitata dal basso.

(c) Per quanto visto in precedenza, $\|\nabla F(x(t), y(t))\| \overset{t\to+\infty}{\to} 0$, ma $\nabla F(x, y) =$
$= (2x + 2y, 2x + 4y)$ si annulla solo in $(0, 0)$ e $\|\nabla F(x, y)\|^2 = (2x + 2y)^2 +$
$+(2x + 4y)^2 \overset{\|(x,y)\|\to\infty}{\to} \infty$; di conseguenza, essendo $\nabla F(x, y)$ continua, ho che $\|\nabla F(x(t), y(t))\| \overset{t\to+\infty}{\to} 0 = \|\nabla F(0, 0)\| \Leftrightarrow (x(t), y(t)) \overset{t\to+\infty}{\to} (0, 0)$, e dunque deve essere $(x(t), y(t)) \overset{t\to+\infty}{\to} (0, 0)$ per qualunque scelta del dato iniziale.

6. $\begin{cases} \dot{x} = 4y\left(x^2 + y^2 - 2\right) \\ \dot{y} = -4x\left(x^2 + y^2 - 2\right) \end{cases}$: i punti di equilibrio sono tutti quelli in cui $x^2 + y^2 - 2 = 0$, cioè quelli appartenenti alla circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{2}$, e quelli in cui $(4y, -4x) = (0, 0)$, cioè l'origine; cerchiamo ora una funzione Hamiltoniana $H \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ tale che $\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases}$: se esiste H siffatta, sarà anche una costante del moto;
$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 4y\left(x^2 + y^2 - 2\right) = 4x^2y + 4y^3 - 8y \\ -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -4x\left(x^2 + y^2 - 2\right) = -4x^3 - 4xy^2 + 8x \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} H(x, y) = 2x^2y^2 + y^4 - 4y^2 + g_1(x) \\ -H(x, y) = -x^4 - 2x^2y^2 + 4x^2 + g_2(y) \end{cases} \Rightarrow H(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 -$
$-4x^2 - 4y^2 + 3 = \left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 3\right)$. Essendo questa una costante del moto, le traiettorie saranno contenute nelle curve di livello di H, ovvero negli insiemi tali che $\left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 3\right) = c$, dunque per poter disegnare le traiettorie è sufficiente sapere come sono fatte queste curve di livello: $\left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 3\right) - c = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 4\left(x^2 + y^2\right) + (3 - c) =$
$= 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2 \pm \sqrt{c + 1}$: se $c < -1$ le curve di livello sono vuote, mentre la curva corrispondente $c = -1$ è la circonferenza $x^2 + y^2 = 2$; se $-1 < c < 3$ le curve sono formate da due circonferenza centrate nell'origine aventi raggio $\sqrt{2 + \sqrt{c + 1}}$ e $\sqrt{2 - \sqrt{c + 1}}$, mentre per $c = -3$ ottengo la circonferenza di raggio 2 e quella di raggio 0, cioè l'origine, e infine quando $c > 3$ la curva di livello è formata da una sola circonferenza di raggio $\sqrt{2 + \sqrt{c + 1}}$; in particolare, tutte le traiettorie del sistema avvengono su circonferenze centrate nell'origine.