Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

SOLUZIONI DEL TUTORATO NUMERO 10 (4 DICEMBRE 2009)
EQUAZIONI DIFFERENZIALI, CONTRAZIONI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $\begin{cases} \dot{x} = \pi x \\ x(0) = 2 \end{cases}$: $\dot{x}(t) = \pi x(t) \Rightarrow \dfrac{\dot{x}(t)}{\pi x(t)} = 1 \Rightarrow t = \displaystyle\int_0^t ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{\pi x(s)} \overset{(x(s)=x)}{=}$
$= \displaystyle\int_2^{x(t)} \frac{dx}{\pi x} = \frac{\log|x(t)| - \log 2}{\pi} \Rightarrow \log|x(t)| = \log 2\pi x \Rightarrow |x(t)| = 2e^{\pi}x \Rightarrow$
$\Rightarrow x(t) = 2e^{\pi x}$, ove è stato scelto il segno positivo per rispettare le condizioni iniziali.

   (b) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 4 \\ x(0) = 0 \end{cases}$: $\dot{x}(t) = x^2(t) + 4 \Rightarrow t = \displaystyle\int_0^t ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s) + 4} ds =$
$\displaystyle\int_0^{x(t)} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int_0^{x(t)} \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{\arctan\left(\frac{x(t)}{2}\right)}{2} \Rightarrow x(t) = 2\tan(2t).$

   (c) $\begin{cases} \dot{x} = x + t \\ x(0) = 1 \end{cases}$: quest'equazione è del tipo $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$, ove
$a(t) = 1$ e $b(t) = t$, dunque la soluzione sarà $x(t) = e^{\int_0^t ds}\left(x(0) + \displaystyle\int_0^t se^{-\int_0^u du}\right) =$
$= e^t\left(1 + \displaystyle\int_0^t se^{-s}ds\right) = e^t\left(1 + \left[-se^{-s}\right]_0^t + \int_0^t e^{-s}ds\right) = e^t(1 - te^{-t} -$
$- e^{-t} + 1) = 2e^t - t - 1.$

   (d) $\begin{cases} \dot{x} = t^2x^2 \\ x(0) = 3 \end{cases}$: $\dot{x}(t) = x^2(t)t^2 \Rightarrow \dfrac{t^3}{3} = \displaystyle\int_0^t s^2 ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s)} ds = \int_3^{x(t)} \frac{dx}{x^2} =$
$= \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{x(t)} \Rightarrow \dfrac{1}{x(t)} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{t^3}{3} \Rightarrow x(t) = \dfrac{3}{1-t^3}.$

   (e) $\begin{cases} \dot{x} = x\sin t + \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$: analogamente al punto c, la soluzione è $x(t) =$
$= e^{\int_0^t \sin s ds}\left(\displaystyle\int_0^t e^{-\int_0^s \sin u du} \sin s ds\right) = e^{1-\cos t}\left(\int_0^t e^{\cos s - 1}\sin s ds\right) \overset{(y=\cos s-1)}{=}$
$= e^{1-\cos t}\left(\displaystyle\int_0^{\cos t - 1} -e^y dy\right) = e^{1-\cos t}\left(\left[-e^y\right]_0^{\cos t - 1}\right) = e^{1-\cos t}\left(1 - e^{\cos t - 1}\right) =$
$= e^{1-\cos t} - 1.$

   (f) $\begin{cases} \dot{x} = \cos x \\ x(0) = 0 \end{cases}$: $t = \displaystyle\int_0^t ds = \int_0^{x(t)} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{x(t)} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx =$
$= \displaystyle\int_0^{x(t)} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx \overset{(y=\sin x)}{=} \int_0^{\sin(x(t))} \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\sin(x(t))} \frac{dy}{1+y} +$
$+ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\sin(x(t))} \frac{dy}{1-y} = \frac{1}{2}\log|1 + \sin(x(t))| - \frac{1}{2}\log|1 - \sin(x(t))| =$

$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sin(x(t))}{1-\sin(x(t))} \right| \Rightarrow e^{2t} = \left| \frac{1+\sin(x(t))}{1-\sin(x(t))} \right| = \left| \frac{2}{1-\sin(x(t))} - 1 \right| \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{2}{1-\sin(x(t))} = e^{2t} + 1 \Rightarrow 1 - \sin(x(t)) = \frac{2}{e^{2t}+1} \Rightarrow \sin x(t) = 1-$
$- \frac{2}{e^{2t}+1} = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \Rightarrow x(t) = \arcsin\left(\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\right)$, ove è stato scelto il segno positivo per via della condizione iniziale.

(g) $\begin{cases} \dot{x} = x - \arctan t + \frac{1}{t^2+1} \\ x(0) = 1 \end{cases}$: ponendo $y(t) = x(t) - \arctan t$ ho che $\dot{y}(t) = \dot{x}(t) - \frac{1}{t^2+1}$ e dunque, essendo $\arctan 0 = 0$, $\begin{cases} \dot{y} = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$:
$t = \int_0^t ds = \int_1^{y(t)} \frac{dy}{y} = \log|y(t)| \Rightarrow |y(t)| = e^t \Rightarrow y(t) = e^t$, ove è stato scelto il segno positivo per rispettare la condizione iniziale; dunque, $x(t) = y(t) + \arctan t = e^t + \arctan(t)$.

(h) $\begin{cases} t\dot{x} + x = t^2 x \\ x(1) = 1 \end{cases}$; ponendo $y(t) = tx(t)$ ho che $\dot{y}(t) = t\dot{x}(t) + x(t)$ e dunque $\begin{cases} \dot{y} = ty \\ y(1) = 1 \end{cases}$: $\frac{t^2}{2} - 1 = \int_0^t s ds = \int_1^{y(t)} \frac{dy}{y} = \log|y(t)| \Rightarrow y(t) =$
$= e^{\frac{t^2}{2}-1} \Rightarrow x(t) = \frac{y(t)}{t} = \frac{e^{\frac{t^2}{2}-1}}{t}$, ove il segno è stato preso positivo per via dei dati iniziali.

(i) $\begin{cases} \ddot{x} = \dot{x}^2 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$; ponendo $y(t) = \dot{x}(t)$ otteniamo $\begin{cases} \dot{y} = y^2 \\ y(0) = 1 \\ x(t) = \int_0^t y(s)ds \end{cases}$:
$t = \int_0^t ds = \int_1^{y(t)} \frac{dy}{y^2} = 1 - \frac{1}{y(t)} \Rightarrow \frac{1}{y(t)} = 1 - t \Rightarrow y(t) = \frac{1}{1-t} \Rightarrow$
$\Rightarrow x(t) = \int_0^t \frac{ds}{1-s} = -\log|1-t|$.

2. (a) $\ddddot{x} - x = 0$: il polinomio caratteristico associato all'equazione è $P(\lambda) =$ $= \lambda^4 - 1$, che ha per radici ± 1 e $\pm i$, quindi l'integrale generale dell'equazione è $c_1 e^t + c_2 e^t + c_3 \cos t + c_4 \sin t$.

(b) $\ddddot{x} + 6\ddot{x} + 9x = 0$: il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(\lambda) =$ $= \lambda^4 + 6\lambda^2 + 9 = \left(\lambda^2 + 3\right)^2$, che ha per radici $\pm\sqrt{3}i$ con molteplicità doppia, dunque l'integrale generale è $c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \sin t + c_4 t \sin t$.

(c) $\dddot{x} - \ddot{x} - \alpha\dot{x} + \alpha x = 0$: il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 -$ $-\alpha\lambda + \alpha\lambda = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - \alpha\right)$: se $\alpha < 0$ ho una radice reale e due complesse coniugate, dunque l'integrale generale è $c_1 e^t + c_2 \cos\left(\sqrt{-\alpha}t\right) +$ $+ \sin\left(\sqrt{-\alpha}t\right)$, se $\alpha = 0$ ho 1 come radice singola e 0 come radice doppia, quindi l'integrale generale è $c_1 e^t + c_2 t + c_3$; se invece $\alpha = 1$, 1 è radice doppia e -1 è radice singola e dunque l'integrale generale è $c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t}$; infine, se $1 \neq \alpha > 0$, abbiamo tre radici reali distinte e dunque l'integrale generale è $c_1 e^t + c_2 e^{\sqrt{\alpha}t} + c_3 e^{-\sqrt{\alpha}t}$.

3. (a) $\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0 \\ \dot{x}(0) = 5 \\ x(0) = 1 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$ ha per radici $1 \pm 2i$, dunque

le soluzioni dell'equazione saranno del tipo $x(t) = c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t)$;
imponendo le condizioni iniziali otteniamo che
$\begin{cases} \dot{x}(0) = c_1 e^0 \cos(2 \cdot 0) - 2c_1 e^0 \sin(2 \cdot 0) + c_2 e^0 \sin(2 \cdot 0) + 2c_2 e^t \cos(2 \cdot 0) = c_1 + 2c_2 = 5 \\ x(0) = c_1 = 1 \end{cases}$,
dunque $(c_1, c_2) = (1, 2)$, cioè la soluzione è $e^t \cos(2t) + 2e^t \sin(2t)$.

(b) $\begin{cases} \dddot{x} + \dot{x} = 0 \\ \ddot{x}(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$: $P_\lambda = \lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda - i)(\lambda + i)$, dunque la soluzione sarà del tipo $c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t$; imponendo le condizioni iniziali ho che $\begin{cases} \ddot{x}(0) = -c_2 \cos 0 - c_3 \sin 0 = -c_2 = 2 \\ \dot{x}(0) = -c_2 \sin 0 + c_3 \cos 0 = c_3 = 2 \\ x(0) = c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$, dunque $(c_1, c_2, c_3) = (2, -2, 2)$
e dunque la soluzione è $x(t) = 2 - 2\cos t + 2 \sin t$.

(c) $\begin{cases} \ddddot{x} - 2\ddot{x} + x = 0 \\ \dddot{x}(0) = 4 \\ \ddot{x}(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 - 1\right)^2 = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 1)^2$,
dunque $x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^2 + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t}$; con le condizioni iniziali troviamo che $\begin{cases} \dddot{x}(0) = (c_1 + 3c_2)e^0 + c_2 0 e^0 + (3c_4 - c_3)e^{-0} - c_4 0 e^{-0} = c_1 + 3c_2 - c_3 + 3c_4 = 4 \\ \ddot{x}(0) = (c_1 + 2c_2)e^0 + c_2 0 e^0 + (c_3 - 2c_4)e^{-0} + c_4 0 e^{-0} = c_1 + 2c_2 + c_3 - 2c_4 = 0 \\ \dot{x}(0) = (c_1 + c_2)e^0 + c_2 0 e^0 + (c_4 - c_3)e^{-0} - c_4 0 e^{-0} = c_1 + c_2 - c_3 + c_4 = 0 \\ x(0) = c_1 + c_3 = 0 \end{cases}$
pertanto $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (-1, 1, 1, 1)$ e cioè $x(t) = -e^t + te^t + e^{-t} + te^{-t}$.

4. $\begin{cases} \dot{x} = |x|^\alpha \\ x(0) = 0 \end{cases}$: se $\alpha \geq 1$, la funzione $|x|^\alpha$ è localmente Lipschitziana in quanto $||x|^\alpha - |y|^\alpha| \leq \sup_{z \in [-M, M]} \left| \frac{d}{dz} |z|^\alpha \right| |x - y| = \alpha M^{\alpha - 1} |x - y|$, e dunque per il teorema di Picard la soluzione del problema di Cauchy è unica; questa soluzione è la soluzione banale $x(t) \equiv 0$, perché la condizione iniziale è un punto di equilibrio del sistema. Se invece $\alpha \in (0, 1)$, è possibile trovare altre soluzioni con il metodo di separazione delle variabili:
$t = \int_0^{x(t)} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \frac{|x(t)|^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \frac{x(t)}{|x(t)|} = \frac{x(t)|x(t)|^{-\alpha}}{1 - \alpha} \Rightarrow |x(t)|^{1-\alpha} = |t|(1 - \alpha) \Rightarrow$
$\Rightarrow x(t) = \pm((1 - \alpha)|t|)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ sono altre due soluzioni del problema.

5. $|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| = \left| \int_0^1 (xy)^\alpha (f(y) - g(y)) \right| \leq \int_0^1 |x|^\alpha |y|^\alpha |f(y) - g(y)| dy \leq$
$\leq \|f - g\|_\infty \int_0^1 |y|^\alpha dy = \|f - g\|_\infty \left[\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \right]_0^1 = \frac{\|f - g\|_\infty}{\alpha + 1}$, dunque Φ è una contrazione, perché $\frac{1}{\alpha + 1} < 1$.