AM2 2009-2010: APPELLO B

TEMA 1. Sia $K \subset \mathbf{R}^n$ insieme chiuso e limitato.

Provare che da ogni ricoprimento aperto di K si puó estrarre un sottoricoprimento finito.

TEMA 2. Sia f analitica in (a,b), f non identicamente nulla.

Provare che f ha, in (a,b), al piú zeri isolati.

TEMA 3. Siano $a_n \in C((a,b))$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. Supposto che

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |a_n(x)|dx < \infty$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *converge totalmente in ogni* $[\alpha, \beta] \subset (a,b)$

provare che

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)dx$$

TEMA 4. Sia $f \in Lip\,(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, cioé

$$\exists L > 0 : \quad \|f(x) - f(y)\| \le L\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n$$

Provare che, se $\gamma(t), \beta(t)$, $t \in [0,T]$ risolvono $\dot{x}(t) = f(x(t))$ allora

$$\|\gamma(t) - \beta(t)\| \le \|\gamma(0) - \beta(0)\|e^{Lt} \qquad \forall t \in [0,T]$$

TEMA 5. Sia $\mathcal{A}$ matrice $n \times n$.

Siano $x^i \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$, $i = 1, \ldots, n$ soluzioni del sistema di n equazioni differenziali lineari a coefficenti costanti

$$\dot{x} = \mathcal{A}x$$

Sia $X(t) := (x^i_j(t))$. Provare che

$$X(t) \text{ é matrice fondamentale} \quad \Leftrightarrow \quad \det X(t) \ne 0 \quad \forall t$$

Sia $b \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$. Provare che l'integrale generale di $\dot{x} = \mathcal{A}x + b$ é dato da

$$x(t) = X(t)\left(b + \int_0^t X^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau\right) \qquad \textbf{(formula della variazione delle costanti)}$$

ESERCIZIO 1.

Sia $f \in C(K \times (a,b)),\ K \subset \mathbf{R}^n$ compatto, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Provare che, se f é equidominata allora la funzione

$$g : x \to \int_a^b f(x,t)\,dt$$

é ben definita e continua in K. Se f é anche di classe C^1, é vero che g é di classe C^1?

ESERCIZIO 2. Sia $f(x,y) = (x^2+y^2) - 2(x^2-y^2), \quad g = f^4$.

Determinare i punti stazionari di g e stabilire se si tratta di minimi/ massimi/ selle.

ESERCIZIO 3. Determinare l'insieme su cui la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(x^2+n^2)}{n \log^3 n}$$

converge uniformemente.

ESERCIZIO 4. Sia

$$f(x,y) \;=\; \frac{x\,y^4}{x^4+y^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \;\neq\; 0, \quad f(0,0) \;=\; 0.$$

Stabilire se f é di classe C^1 e, in subordine, se f é differenziabile in $(0,0)$.

ESERCIZIO 5. Determinare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n)^{2n}}{2n} x^n$$

e stabilire, eventualmente, il comportamento al bordo dell'intervallo di convergenza.