AM2: Tracce delle lezioni- VIII Settimana

SVILUPPI IN SERIE DI TAYLOR, ANALITICITA'

Formula di Taylor Sia $I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ f \in C^\infty(I)$. Allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x_0, x)$$

ove (rappresentazione integrale del resto)

$$R_n = R_n(x_0, x) \ = \ \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n f^{(n+1)}(tx + (1 - t)x_0) dt \qquad \forall x \in I_\delta(x_0)$$

Serie di Taylor Sia $f \in C^\infty(I_\delta(x_0))$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ si chiama serie di Taylor di f di punto iniziale x_0

SVILUPPABILITÁ IN SERIE DI TAYLOR

f si dice **sviluppabile in serie di Taylor** in x_0 se esiste $\delta = \delta_{x_0} > 0$ tale che

$$f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \forall x \in I_\delta(x_0)$$

UN ESEMPIO: $f(x) \ := \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $|x| < r = \limsup_n |a_n|^{-\frac{1}{n}}$. Infatti $f \in C^\infty((-r, r))$ e $f^{(n)}(0) \ = \ n! a_n$ ovvero $f(x) \ := \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, $|x| < r$.
Si hanno ad esempio i seguenti sviluppi in serie di Taylor (validi per $|x| < 1$):

$$\frac{1}{1 - x} \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \frac{1}{1 + x} \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad \frac{1}{1 + x^2} \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\log(1 + x) \ = \ \int_0^x \frac{dt}{1 + t} \ = \ \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n] \, dt \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1} x^{n+1}$$

$$\arctan x \ = \ \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} \ = \ \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}] \, dt \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} x^{2n+1}$$

Proposizione $f \in C^\infty(I_\delta(x_0))$ é sviluppabile in serie di Taylor in x_0 sse $\exists r > 0 :$ $R_n(x, x_0) \to_{n \to +\infty} 0 \ \forall x \in I_r(x_0)$.

Infatti, dalla formula di Taylor, $f(x) - \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ = \ R_N(x, x_0)$.

FUNZIONI ANALITICHE

Una funzione f si dice analitica in un intervallo aperto I se é 'localmente' somma di una serie di potenze: $\forall x_0 \in I, \ \exists\ a_n, r > 0$ *(dipendenti da x_0) tali che*

$$f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \text{in} \quad I_r(x_0)$$

NOTA. f analitica in I implica $f \in C^\infty(I)$ ma non viceversa:
$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$ é C^∞, con derivate di ogni ordine uguali a zero in $x = 0$: dunque f non é somma della sua serie di Taylor.

Proposizione Sia $f \in C^\infty((a,b))$. Se

$$\exists\ M,\ r > 0: \quad \sup_{(a,b)} |f^{(n)}(x)| \ \leq \ \frac{Mn!}{r^n} \ \ \forall\ n \in \mathbf{N}$$

allora f é analitica in (a,b). Piú precisamente, $\forall\ x_0 \in (a,b)$, si ha

$$f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap (a,b)$$

Dimostrazione:

$$|R_n(x,x_0)| \leq \frac{|x - x_0|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |f^{(n+1)}(tx + (1-t)x_0)| dt \leq M(\frac{|x - x_0|}{r})^{n+1} \to 0$$

La somma di una serie di potenze é una funzione analitica.

Sia $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \ , \quad |x| < r := \limsup_k |a_k|^{\frac{1}{k}})^{-1}$. Siano $\underline{r} < \overline{r} < r$. Ora,

$$\limsup_k |a_k|^{\frac{1}{k}} \ < \ \frac{1}{\overline{r}} \Rightarrow \quad \exists\ \overline{k}: \qquad |a_{j+k}| \ \leq \ \frac{1}{\overline{r}^{j+k}}, \qquad \forall k \geq \overline{k}, \ \ \forall j \in \mathbf{N}$$

Poi, $f^{(k)}(x) \ = \ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!}\, a_{j+k}\, x^j \Rightarrow |f^{(k)}(x)| \ \leq \ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} \ \frac{\underline{r}^j}{\overline{r}^j} \ \ \frac{1}{\overline{r}^k}$ se $k \geq \bar{k}$, $\quad |x| \ \leq \ \underline{r}$.
Usando ora la formula $\quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!}\, x^j \ = \ \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in (-1,1), \quad$ otteniamo

$$|f^{(k)}(x)| \ \leq \ \frac{k!}{\overline{r}^k(1 \ - \ \underline{r} \ \ \overline{r}^{-1})^{k+1}} \ = \ \frac{\overline{r}\, k!}{(\overline{r} \ - \ \underline{r})^{k+1}}, \quad \forall k \geq \overline{k}, \ \ |x| \leq \underline{r}$$

Dalla Proposizione precedente segue che f é sviluppabile in serie di Taylor (di raggio di convergenza almeno $\overline{r} - \underline{r}$) attorno ad ogni punto dell'intervallo $[-\underline{r}, \underline{r}]$.

Principio di identitá Siano f, g analitiche in (a,b). Allora

$$\exists\, x_0 \in (a,b): \quad f^{(n)}(x_0) \;=\; g^{(n)}(x_0) \;\; \forall n \in \mathbf{N} \qquad \Rightarrow \qquad f \equiv g \;\; \text{in}(a,b)$$

Dall'analiticitá: $\exists \delta > 0 : f(x) \;=\; g(x) \quad \forall x \;\in\; (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e quindi

$$b' := \sup\{x < b : \;\; f(t) \;=\; g(t) \quad \forall t \in [x_0, x]\} \;\geq\; x_0 + \delta > x_0$$

Ora, $x < b' \Rightarrow f \equiv g$ in $[x_0, x] \Rightarrow f^{(n)}(x) \;=\; g^{(n)}(x)$ in $[x_0, b')$, $\forall n$.

Se fosse $b' < b$, sarebbe , per continuitá, $f^{(n)}(b') \;=\; g^{(n)}(b') \;\; \forall n$ e quindi $f \equiv g$ in un intorno di b', contraddicendo la natura di sup di b'.

Zeri di funzioni analitiche Una funzione analitica in (a,b) e non identicamente nulla, ha, in (a,b), solo zeri isolati.

Se $x_n \to_n x \in (a,b)$, $f(x_n) \;=\; 0$ é $f(x) \;=\; 0$ ed inoltre, per il teorema di Rolle, $\exists x_n'$ tra x_n e x tale che $f'(x_n') \;=\; 0$ e quindi $f'(x) \;=\; \lim_n f'(x_n') \;=\; 0$ Iterando l'argomento, si trovano, per ogni $k \in \mathbf{N}$, $x_n^{(k)}$ zeri di $f^{(k)}$ che convergono a x e quindi $f^{(k)}(x) \;=\; 0 \quad \forall k$ e quindi $f \equiv 0$.

SERIE DI POTENZE NEL CAMPO COMPLESSO

1. (Cauchy-Hadamard) Sia $a_n \in \mathbf{C}$, $r := \left[\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}}\right]^{-1}$. Allora

$$z \in \mathbf{C}, \quad |z| < r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < +\infty, \qquad |z| > r \quad \Rightarrow \quad \text{la serie non converge}$$

r:= raggio di convergenza, $D_r := \{z : \; |z| < r\}$:= disco di convergenza .

UN ESEMPIO. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ converge in $|z| < 1$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \;=\; \frac{1}{1-z}$.

2. La funzione esponenziale in C.

$$\exp\, z \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{converge} \qquad \forall z \in \mathbf{C}$$

Proprietá di $\exp z$*:* (i) $\exp\,(z + w) \;=\; \exp z \;\; \exp w \quad \forall\, z,\; w \;\in \mathbf{C}$.

Infatti, $\exp(z+w) \;=\; \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \;=\; \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{n!} \sum\limits_{j+k=n} \frac{n!}{j!\,k!}\, z^j\, w^k) =$ (vedi 3.3 nei Richiami..)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j+k=n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^k}{k!}) \;=\; (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!})\,(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}) \;=\; \exp z \;\exp w$$

(ii) $x \to \exp x, \quad x \in \mathbf{R}$ é **prolungamento continuo** di $r \to e^r, r \in \mathbf{Q}$.

Infatti, $(\exp z)^p = \exp(pz) \; \forall p \in \mathbf{N},\ z \in \mathbf{C}$, $\exp p = (\exp 1)^p =: e^p$, $(\exp(\frac{1}{p}))^p = e$. Dunque $\exp(\frac{1}{p}) = e^{\frac{1}{p}}$.

(iii) $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}, \quad \overline{\exp z} = \exp \overline{z}, \quad |\exp(it)| = 1 \;\; \forall t \in \mathbf{R}$

Infatti: $\exp z \, \exp(-z) = 1; \quad \exp \overline{z} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \overline{\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\exp z};$
$|\exp(it)|^2 = \exp(it)\, \overline{\exp(it)} = \exp(it)\, \exp(-it) = 1.$

3. Formule di Eulero $\qquad \exp(\pm it) = \cos t \pm i \sin t \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$

$$\sin t = \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i}, \qquad \cos t = \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Da $\exp(it) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}$ segue

$$Re\,(\exp it) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \cos t, \quad Im\,(\exp it) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin t$$

Dalle formule di Eulero segue che $\exp(2k\pi i) = 1 \;\; \forall k \in \mathbf{Z}$, e quindi
-$\exp(it),\ t \in \mathbf{R}$ é 2π-**periodica**, $\exp(x + iy + 2\pi i) = \exp(x + iy)$,
-$|z| = 1 \;\Rightarrow\; \exists\,!\ t \in (-\pi, \pi] : \; z = \exp(it)$

4. Funzioni circolari ed iperboliche sui complessi

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall z \in \mathbf{C}$$

$$\sinh z := \frac{1}{2}(\exp z - \exp(-z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall z \in \mathbf{C}$$

$$\cosh z := \frac{1}{2}(\exp z + \exp(-z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall z \in \mathbf{C}$$

e quindi (i) $\exp(iz) \equiv \cos z + i \sin z, \qquad \exp(-iz) \equiv \cos z - i \sin z$

(ii) $\cos z \equiv \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2} \equiv \cosh iz, \quad \sin z \equiv \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i} \equiv \frac{\sinh(iz)}{i}$

Da (ii) segue: $\sin z, \cos z$ sono funzioni 2π-periodiche mentre $\sinh z, \cosh z$ sono $2\pi i$-periodiche. Inoltre, $\sin^2 z + \cos^2 z \equiv 1$, $\cosh^2 z - \sinh^2 z \equiv 1$

5. Definizione di $\arg z, \quad \log z, \quad z \in \mathbf{C}$

Dato $z \in \mathbf{C}$, $\arg z$ (**argomento di** z) é l'unico reale in $(-\pi, \pi]$ tale che

$$z = |z| \exp(i \arg z)$$

Notiamo che, per periodicitá, $z = |z| \exp(i(\arg z + 2k\pi)) \ \forall k \in \mathbf{Z}$. Scriveremo

$$Arg\, z := \{\arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}\}$$

Ora, dato $w \in \mathbf{C}$, $w \neq 0$

$$\exp z = w \quad \Leftrightarrow \quad \exp(Re\, z) \exp(i\, Im\, z) = |w| \exp(i \arg w) \quad \Leftrightarrow$$

$$\exp\, Re\, z = |w| \quad \text{e} \quad Im\, z - \arg w \in 2\pi\, \mathbf{Z} \qquad\qquad \text{cioé}$$

$$\exp z = w \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{\log|w| + i\, Arg\, w\}$$

Porremo $\qquad Log\, w := \{\log|w| + i\, Arg\, w\} \quad \forall w \in \mathbf{C}, \ w \neq 0$

La funzione $log\, w := \log|w| + i \arg w$ si chiama valore principale del logaritmo.

Esempi. $Log\, x = \log x + 2k\pi i, \ \forall x > 0, \ Log\, x = \log|x| + (2k+1)\pi i, \ \forall x < 0.$
$log\,(-1) = \pi i, \ log\, i = \frac{\pi}{2} i, \ Log\,(1-i) = \log\sqrt{2} + (2k - \frac{1}{4})\pi i.$

Esercizi. (i) $Log\,(zw) = Log\, z + Log\, w$ ove, per $A, B \subset \mathbf{C}$, $A + B := \{a + b : \ a \in A, \ b \in B\}$. Infatti $Arg\,(zw) = Arg\, z + Arg\, w$.

(ii) $Log\,(-z) = Log\, z + \pi i \qquad \forall z \neq 0$.

(iii) Trovare l'errore in $z^2 = (-z)^2 \Rightarrow Log\,(z)^2 = Log\,(-z)^2 \Rightarrow Log z + Log z = Log(-z) + Log(-z) \Rightarrow 2 Log z = 2 Log(-z) \Rightarrow Log z = Log(-z)$.

6. Potenze in C Se $w, z \in C, w \neq 0$

$$w^z := \exp(z\, Log\, w) = \exp\{z\, [\log|w| + i(arg\, w + 2k\pi)]\} \qquad k \in \mathbf{Z}$$

Esempi. Sia $z = n \in \mathbf{N}$; $\quad w^n = \exp\{n\, [\log|w| + i(arg\, w + 2k\pi)]\} = \exp\{n \log|w|\} \exp\{n\, i(arg\, w + 2k\pi)\} = |w|^n [\exp\{i(arg\, w + 2k\pi)\}]^n = w \times \ldots \times w$ (n volte).

Se $z = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, $a^{\frac{1}{n}} = \{|a|^{\frac{1}{n}} \exp i\, \frac{arg\, a + 2k\pi}{n}, \ k = 0, \ldots, n-1\}$ (le n radici complesse di a).

Se $z \notin \mathbf{Q}$, a^z é un insieme infinito. In particolare, $e^z = \exp z$ se e solo se $z \in \mathbf{Z}$.

RICHIAMI ESERCIZI E COMPLEMENTI

1. Formula di Taylor Sia $f \in C^\infty(I_\delta(x_0))$. Allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x_0,x)$$

$$R_n(x_0,x) = \frac{1}{n!}(x-x_0)^{n+1} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx+(1-t)x_0)dt \quad \forall x \in I_\delta(x_0)$$

Prova. Proviamo dapprima (per induzione) che, se $\varphi \in C^\infty([0,1])$, allora

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)dt \qquad (T)_n$$

$(T)_1$ é il TFC: $\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)dt$. $(T)_2$ si ottiene da $(T)_1$ mediante una integrazione per parti :

$$\int_0^1 \varphi'(t)\,dt \;=\; \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt \;-\; (1-t)\varphi'(t)\,|_0^1 \;=\; \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt \;+\; \varphi'(0)$$

Analogamente, $(T)_{n+1}$ segue da $(T)_n$ mediante integrazione per parti:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)\,dt \;=\; \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n\,\varphi^{(n+1)}(t)\,dt + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)$$

Sia ora $|x-x_0| < \delta$ e $\varphi(t) := f(tx+(1-t)x_0),\ t \in [0,1]$. É

$$\varphi(1) = f(x), \quad \varphi(0) = f(x_0), \quad \varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(tx+(1-t)x_0)(x-x_0)^k.$$

Sostituendo, otteniamo da (T_n) la formula di Taylor per f , con rappresentazione integrale del resto

$$R_n(x,x_0) := f(x) - \Big[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\Big].$$

NOTA. Si ha anche

$$R_n(x,x_0) = \tfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{t}x + (1-\bar{t})x_0) \qquad \text{per un } \bar{t} = t(x) \in [0,1].$$

É questa la rappresentazione del resto nella forma di Lagrange, e segue dalla rappresentazione del resto in forma integrale e dal teorema della media.

2. Sviluppi in serie di Taylor Sia $f \in C^\infty(\mathbf{R})$. Allora

$$M_{n,r} := \max_{|x|\le r} |f^{(n)}(x)| \ < +\infty \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

Infatti, $|x| \ \le r \ \ \Rightarrow \ \ |R_n(x)| \ \le \ \frac{r^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \sup_{|x|\le r} |f^{(n+1)}(x)|\, dt \ \le \ \frac{M_r\, r^{n+1}}{n+1!} \to_n 0.$

Si ottengono subito, ad esempio, i seguenti sviluppi in serie

$$e^x \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sin x \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} \qquad \cos x \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \quad \forall x$$

$$\sinh x \ = \ \frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ - \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\,] \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} \qquad \cosh x \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!}$$

Serie binomiale $\qquad (1+x)^\alpha \ = \ 1 \ + \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n \qquad \forall x \in (-1,1)$

Infatti, $\frac{d^n}{dx^n}\,(1+x)^\alpha \ = \ \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ e, se $a_n := \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)|}{n!}$, é $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$. Poi, $1-t \ \le \ 1+tx \quad \forall x \in (-1,1),\ t \in [0,1]$

$$\Rightarrow \quad |R_n(x)| \ \le \ \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!} |x|^{n+1} \int_0^1 [\frac{1-t}{1+tx}]^n (1+tx)^{\alpha-1} dt$$

$$\le \ \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!} |x|^{n+1} \int_0^1 (1+tx)^{\alpha-1} dt \ \to 0 \quad \forall x \in (-1,1)$$

Ad esempio, per $x \in (-1,1)$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \dots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times 2n-1}{2^n \times n!} + \dots \ = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ = \ 1 \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1!!}{2n!!} x^{2n} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ = \ 1 \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^{2n}$$

$$\sin^{-1} x \ = \ \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \ = \ x \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)} x^{2n+1}$$

$$\sinh^{-1} x \ = \ \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \ = \ x \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)} x^{2n+1}$$

Comportamento agli estremi. Siccome $\frac{2n-1!!}{2n!!} : \frac{2n+1!!}{2n+2!!} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$, la serie di Taylor di $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ converge, per il criterio di Leibnitz, anche in $x = 1$ e la convergenza é uniforme in tutto $[0, 1]$. In particolare, $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{2n-1!!}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Poi, siccome $\frac{2n-1!!}{2n!!} = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, le serie di Taylor di $\sin^{-1} x$ e di $\sinh^{-1} x$ convergono assolutamente in 1 e -1 e la convergenza é uniforme in tutto $[-1, 1]$. In particolare,

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)} = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}, \quad 1+\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)} = \sinh^{-1} 1 = \log(1+\sqrt{2})$$

Esercizio. Trovare il raggio di convergenza r della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} \; x^n$$

Dallo sviluppo di Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \; x^n \quad \text{valido per} \quad |x| < 1$$

segue (scrivendo $-2x$ al posto di x) che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} \; x^n = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} - 1 \quad \forall x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Dunque il raggio di convergenza é $r = \frac{1}{2}$. Inoltre, sempre dallo sviluppo di $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ che converge in $x = 1$ e diverge in $x = -1$, segue che la serie data converge in $x = -\frac{1}{2}$ e diverge in $x = \frac{1}{2}$.

3. Successioni e serie nel campo complesso

Definizione 3.1 $z_n \in \mathbf{C}$ converge a z $(z_n \to_n z)$ $\Leftrightarrow$ $|z_n - z| \to_n 0$.

Siccome $|z_n - z|^2 = |Rez_n - Rez|^2 + |Imz_n - Imz|^2$, si ha che:

$$z_n \to_n z \quad \Leftrightarrow \quad Rez_n \to_n Rez \quad \text{e} \quad Imz_n \to_n Imz$$

$$z_n \to_n z \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon : \quad n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |z_n - z_m| \leq \epsilon \quad \textbf{(Cauchy)}$$

Definizione 3.2 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge sse $S_N := \sum_{n=1}^{N} z_n$ converge.
$\sum_n z_n$ si dice assolutamente convergente se $\sum_n |z_n| < +\infty$.

(**Cauchy**) $\sum_n z_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon :\ |\sum_{n=N}^{N+p} z_n| \le \epsilon \quad \forall N \ge N_\epsilon,\ \forall\, p.$

In particolare, $\sum_n |z_n| < +\infty \Rightarrow \sum_n z_n$ converge e in particolare,

$\limsup_n |z_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \Rightarrow \sum_n |z_n| < +\infty \Rightarrow \sum z_n$ converge.

3.3. Lemma (Prodotto secondo Cauchy). $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |w_n| < +\infty \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sum_{j+k=n} z_j\, w_k| < +\infty \ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j+k=n} z_j\, w_k) = (\sum_{n=0}^{\infty} z_n)\ (\sum_{n=0}^{\infty} w_n)$$

Prova Siano $s_N := \sum_{n=0}^{N} z_n, \quad \sigma_N := \sum_{n=0}^{N} w_n$

$$p_N := \sum_{n=0}^{N}(\sum_{j+k=n} z_j w_k) = z_0w_0+(z_0w_1+z_1w_0)+\ldots+(z_0w_N+z_1w_{N-1}+\ldots+z_{N-1}w_1+z_Nw_0)$$

$$= z_0(w_0+w_1+\ldots+w_N)+z_1(w_0+\ldots+w_{N-1})+\ldots+z_Nw_0.$$ Dunque

$$|s_N\,\sigma_N - p_N| =$$

$$|z_0(w_0+\ldots+w_N)+z_1(w_0+\ldots+w_N)+\ldots+z_{N-1}(w_0+\ldots+w_N)+z_N(w_0+\ldots+w_N)-$$

$$[z_0\,(w_0+w_1+\ldots+w_N)+z_1\,(w_0+\ldots+w_{N-1})+\ldots+z_{N-1}(w_0+w_1)+z_N\,w_0]| =$$

$$|z_1\,w_N + z_2(w_{N-1}+w_N) + \ldots + z_{N-1}(w_2+\ldots+w_N) + z_N\,(w_1+\ldots+w_N)| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \left[|z_j|\,|\sum_{i=1}^{j} w_{N-j+i}|\right] + \sum_{j=n+1}^{N} \left[|z_j|\,|\sum_{i=1}^{j} w_{N-j+i}|\right] \le$$

$$\le \left[\sum_{j=1}^{n} |z_j|\right] \left[\sum_{k=N-n+1}^{\infty} |w_k|\right] + \left[\sum_{j\ge n+1} |z_j|\right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|\right] \qquad n := [\frac{N}{2}].$$ Da

$\sum_{k=N-[\frac{N}{2}]+1}^{\infty} |w_k| \to_{N\to+\infty} 0, \ \sum_{j\ge[\frac{N}{2}]+1} |z_j| \to_{N\to+\infty} 0, \ \sum_j |z_j| < +\infty, \ \sum_{k=1}^{\infty} |w_k| < \infty$
segue $|s_N\,\sigma_N - p_N| \to_{N\to+\infty} 0$ e quindi $\lim_N p_N = \lim_N s_N\,\sigma_N$.

4. Funzioni di variabile complessa

Se r é il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, allora $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é una funzione nella di variabile complessa $z \in \{|z| < r\}$ a valori in $\mathbf{C}$.

La funzione f puó anche essere vista come funzione di due variabili a valori in $\mathbf{R}^2$: $(x,y) \to (\Re f(x+iy), \Im f(x+iy))$. In ogni caso, f continua significa che $u := \Re f, v := \Im f$ sono funzioni continue, mentre si hanno due diverse nozioni di derivabilitá:
- f sará $\mathbf{R}-$differenziabile se lo é $(x,y) \to (u(x,y), v(x,y))$
-f sará $\mathbf{C}$-differenziabile se vale la seguente

5. Definizione di funzioni olomorfa $f(z)$ é olomorfa in $D_r = \{|z| < r\}$ se

$$\forall z_0 \in D_r, \quad \exists f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \tfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

6. La somma di una serie di potenze é una funzioni olomorfa:
$f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é olomorfa in $D_r = \{|z| < r\}$, $\quad r = (\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$.

Prova. Siano $z,\ z_0 \in D_\rho,\ \ \rho < r$. É

$$|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}| \le \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, |\frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} - n z_0^{n-1}|$$

Ora,

$$|z^n - z_0^n| = |(z-z_0)\,(z^{n-1} + z_0\, z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-2}\, z + z_0^{n-1})| \le |z-z_0| n\, \rho^{n-1} \quad \Rightarrow$$

$$|\frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} - n z_0^{n-1}| = |z^{n-1} - z_0^{n-1} + z_0(z^{n-2} - z_0^{n-2}) + \ldots + z_0^{n-2}(z-z_0)| \le$$

$$\le |z^{n-1} - z_0^{n-1}| + |z_0|\, |z^{n-2} - z_0^{n-2}| + \ldots + |z_0|^{n-2}\, |z-z_0| \le$$

$$\le |z-z_0| \left[(n-1)\rho^{n-2} + (n-2)|z_0|\rho^{n-3} + \ldots + |z_0|^{n-2}\right] \le \frac{n(n-1)}{2} |z-z_0|\, \rho^{n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, |\frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} - n z_0^{n-1}| \le |z-z_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, \frac{n(n-1)}{2}\, \rho^{n-2} \to_{z \to z_0} 0$$

perché $\rho < r \Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|\, \frac{n(n-1)}{2}\, \rho^{n-2} < +\infty$.

NOTA. Iterando: $f \in C^\infty(D_r)$: $\frac{d^n f}{dz^n}(z) = f^{(n)}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^k \quad \forall z \in D_r$

Il carattere C^∞ delle funzioni olomorfe é quanto afferma il

7. Teorema di Morera Se $f(z)$ é olomorfa in O, sottoinsieme aperto di $\mathbf{C}$, allora $f \in C^\infty(O)$.

Esempio. $(\exp z)' = \exp z$.

Da ció segue subito che $\exp(z+w) = \exp z \exp w \quad \forall z, w \in \mathbf{C}$.
Infatti $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $\frac{d}{dz}[\exp z \exp(\lambda - z)] = \exp z \exp(\lambda - z) - \exp(\lambda - z) \equiv 0$. Ma allora $[\exp z \exp(\lambda - z)] \equiv C = \exp \lambda$, ove il valore della costante C si é ottenuto mettendo $z = 0$. Ponendo $\lambda = w + z$, otteniamo appunto $\exp(z+w) = \exp z \exp w$.

8. Equazioni di Cauchy-Riemann e funzioni armoniche

Se $f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ è olomorfa allora

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{(equazioni di Cauchy-Riemann)}$$

Viceversa, se le derivate parziali di u, v esistono, soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann e sono continue, allora f é olomorfa.

$\Rightarrow$: $f'(z) = a + ib \quad \Rightarrow \quad [u(x+s, y+t) - u(x,y)] + i[v(x+s, y+t) - v(x,y)] = (a+ib)(s+it) + \circ(|s| + |t|) \quad \Rightarrow$
$u(x+s, y+t) - u(x,y) = as - bt + \circ(|s| + |t|)$,
$v(x+s, y+t) = v(x,y) + bs + at + \circ(|s| + |t|)$.
Dunque

$$a = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \; b = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$\Leftarrow$: Sia $x + iy = z, s + it = w$; da $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ e
$u(x+s, y+t) = u(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x}s + \frac{\partial u}{\partial y}t + \circ(|s| + |t|)$
$v(x+s, y+t) = v(x,y) + \frac{\partial v}{\partial x}s + \frac{\partial v}{\partial y}t + \circ(|s| + |t|)$, segue

$$f(z+w) - f(z) = (\tfrac{\partial u}{\partial x} + i\tfrac{\partial v}{\partial x})s + (\tfrac{\partial v}{\partial y} - i\tfrac{\partial u}{\partial y})\, it + \circ(|s| + |t|) =$$

$$= (\tfrac{\partial u}{\partial x} + i\tfrac{\partial v}{\partial x})\,(s+it) + \circ(|s| + |t|) \;\Rightarrow\; f'(z) = \tfrac{\partial u}{\partial x} + i\tfrac{\partial v}{\partial x} = \tfrac{\partial v}{\partial y} - i\tfrac{\partial u}{\partial y}.$$

In particolare se $f(z) = u + iv$ e $u, v \in C^2$, dalle equazioni di Cauchy-Riemann e dal Lemma di Schwartz segue $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ (u, v sono **armoniche**).