AM2: Tracce delle lezioni- VI Settimana

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

CONVERGENZA PUNTUALE. Sia E un insieme.

$$\mathcal{F}(E,\mathbf{R}) := \{f : E \to \mathbf{R}\}$$

Una applicazione $\mathbf{N} \to \mathcal{F}(E,\mathbf{R})$, $n \to f_n$ é sucessione di funzioni in E.

Diremo che f_n **converge puntualmente in** E **alla funzione** f *se, per ogni* $x \in E$, $|f_n(x) - f(x)| \to_n 0$

Diremo che **la serie di funzioni** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **converge puntualmente in** E *se la successione delle somme parziali* $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} f_n(x)$ *converge puntualmente in* E . Scriveremo

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_n(x)$$

ESEMPI. $(n = 1)$

1. Se $f_n(x) \equiv a_n$, $x \in E \subset \mathbf{R}$, le f_n convergono se e solo se a_n converge e, in tal caso, $\lim_n f_n(x) \equiv \lim a_n$.
2. Se $f_n(x) = x^n, x \in \mathbf{R}$, allora $f_n(x)$ converge se e solo se $x \in (-1, 1]$ e la funzione limite vale zero in $[0, 1)$ e vale 1 in $x = 1$.
3. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ *converge se e solo se* $x = m\pi$ *per qualche intero* m (ed in tal caso la somma é zero) giacché $\limsup_n |\sin(nx)| > 0$ se $x \notin \mathbf{Z}\pi$.
Supponiamo per assurdo che $\limsup_n |\sin(nx)| = 0$ e quindi $\lim_n[\sin(nx)] = 0$. Sia

$$m(n) \in \mathbf{Z} : \quad m(n)\pi \le nx \le [m(n) + 1]\pi$$

Allora $\delta_n := \min\{nx - m(n)\pi, \quad (m(n) + 1)\pi - nx\} \to_n 0$, altrimenti esistono $n_k \to_k +\infty$ e $\delta > 0$ tali che $m(n_k)\pi + \delta \le n_k x \le (m(n_k) + 1)\pi - \delta$ e quindi $|\sin(n_k x)| \ge \sin\delta$. Dunque,

$$\forall n, \exists l_n \in \mathbf{Z} : \quad nx = l_n\pi + \circ(1) \quad \text{e} \quad (n + 1)x = l_{n+1}\pi + \circ(1) \quad \text{e quindi}$$

$$(l_{n+1} - l_n)\pi = x + \circ(1)$$

Necessariamente $k_n := l_{n+1} - l_n$ é limitata e quindi esiste k_{n_j} convergente a qualche intero k. Da $x = k_{n_j}\pi + \circ(1) \to_j k\pi$ segue appunto $x = k\pi$.
Notiamo, in aggiunta, che $\liminf_n |\sin(nx)| = 0$ *per ogni* x. *Questo é ovvio se* x *é multiplo razionale di* π, *mentre, se* $\frac{x}{\pi} \notin \mathbf{Q}$, *usiamo il fatto (non banale..) che*

esistono $n_k \in \mathbf{N}, m_k \in \mathbf{Z}$ *tendenti all'infinito tali che* $|\frac{x}{\pi} - \frac{m_k}{n_k}| \leq \frac{1}{n_k^2}$ *e quindi* $|n_k x - m_k \pi| = \circ(1)$ *e quindi* $\sin(n_k x) = \sin(n_k x - m_k \pi) = \circ(1)$.
Concludiamo che $\lim_n (nx)$ *esiste se e solo se* x *é multiplo intero di* π.

4. **SERIE DI POTENZE** Se $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n, \quad a_n, x, x_0 \in \mathbf{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad (SP)$$

si chiama serie di potenze centrata in (o di punto iniziale) x_0.

ESEMPIO. La serie di Taylor di $f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ di punto iniziale x_0:

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Se (SP) converge in $\overline{x}$ *allora converge assolutamente in* $\{x : |x - x_0| < |\overline{x} - x_0|\}$.
Infatti, $a_n(\overline{x} - x_0)^n$ deve essere limitata, e quindi, se $|x - x_0| < |\overline{x} - x_0|$, risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n| \leq (\sup_n |a_n(\overline{x} - x_0)^n|) \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{x - x_0}{\overline{x} - x_0}|^n < +\infty$$

Raggio di convergenza (formula di Cauchy-Hadamard).

$r := \sup\{|z| : \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \ \}$ é **raggio di convergenza** di (SP) e si ha
$r = (\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} \qquad ((\frac{1}{0} := +\infty, \ \frac{1}{\infty} := 0)$. Infatti

$$|x| < r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| < +\infty, \qquad |x| > r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| = +\infty$$

Ció segue subito dal criterio della radice:

$$|x| \limsup_n (|a_n|)^{\frac{1}{n}} = \limsup_n (|x|^n |a_n|)^{\frac{1}{n}} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| < +\infty$$

$$|x| \limsup_n (|a_n|)^{\frac{1}{n}} = \limsup_n (|x|^n |a_n|)^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| = +\infty$$

Infine, $\{|x| < r\}$ é l' **intervallo di convergenza** $((\frac{1}{0} := +\infty, \ \frac{1}{\infty} := 0)$

NOTA. $\lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$, se esiste, é il raggio di convergenza della serie data. Infatti, se $r := \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ e $|x| < r$ si ha che $\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \to \frac{|x|}{r} < 1$ e quindi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| < +\infty$ mentre $|x| < r \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \to \frac{|x|}{r} > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| = +\infty$

Esempi (di serie di potenze)

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = 0$. Infatti $(n^n)^{\frac{1}{n}} = n \to +\infty$

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^\alpha\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = 1$. Infatti $(n^\alpha)^{\frac{1}{n}} = (n^{\frac{1}{n}})^\alpha \to 1$

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = +\infty$. Infatti $\frac{(n+1)!}{n!} \to +\infty$.

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = \frac{1}{e}$. Infatti,

$$\frac{n^n}{n!}\ \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\ =\ (\frac{n}{n+1})^n \to \frac{1}{e}.$$

NOTA. Dagli esempi precedenti si vede che una serie di potenze puó avere qualsiasi comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza. :
In (2):
se $\alpha \geq 0$ la serie diverge in $x = 1$ mentre non converge né diverge in $x = -1$
Se $\alpha \in [-1, 0)$, la serie diverge in $x = 1$ e converge in $x = -1$ (Leibnitz)
se $\alpha < -1$ la serie converge assolutamente sia in $x = 1$ che in $x = -1$.

In (4) : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\ \frac{1}{e^n}\ = +\infty$ perché, da

$$n! = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n}\left(\sqrt{2\pi} + O(\frac{1}{n})\right) \qquad \textbf{(formula di Stirling)}$$

segue $\frac{n^n}{n!\, e^n}\ =\ \frac{1}{\sqrt{2n\pi}\, +\, \circ(\sqrt{n})}$. Infine, la serie converge in $x = -\frac{1}{e}$ (Leibnitz).

5. $1\ +\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^n$ (serie di Mac Laurin di $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$).
Ha raggio di convergenza 1 (come tutte le serie binomiali). Comportamento al bordo: siccome $\frac{2n-1!!}{2n!!}\ :\ \frac{2n+1!!}{2n+2!!} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$, la serie converge in $x = 1$ (criterio di Leibnitz) mentre in $x = -1$ diverge perché, per Stirling,

$$\frac{2n-1!!}{2n!!}\ =\ \frac{2n!}{(2n!!)^2}\ =\ \frac{2n!}{2^{2n}(n!)^2}\ =\ O(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

CONVERGENZA UNIFORME

Sia $f_n, \in \mathcal{F}(E, \mathbf{R})$ successione di funzioni in E. Se f_n converge puntualmente in E ad f, diremo che la convergenza é uniforme in E se

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to\infty} 0$$

ESEMPI. 1. La successione $f_n(x) = x^n$ converge uniformemente a zero in $[0, a]$ se $0 < a < 1$, ma la convergenza **non é uniforme** in $[0, 1)$. Infatti

$$\sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n \to 0 \qquad \text{mentre} \qquad \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1$$

2. (**Traslazioni**). Sia $f \neq 0$ una funzione nulla fuori di $(0, 1)$. Siano $f_n(x) := f(x - n)$ le traslate di f. Allora $f_n(x) \to_{n\to\infty} 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$, ma la convergenza **non é uniforme**, giacché $\sup_{\mathbf{R}} |f_n| = \sup_{\mathbf{R}} |f|$.

3. (**Cambi di scala**). Sia $f \neq 0$ una funzione nulla fuori di B, la palla unitaria in $\mathbf{R}^n$. Siano $f_n(x) := f(nx)$. Allora $f_n(x) \to_{n\to\infty} 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$, ma la convergenza **non é uniforme**, giacché $\sup\limits_{\mathbf{R}^n} |f_n| = \sup\limits_{\mathbf{R}^n} |f|$.

4. Sia $f_n(x) := \min\{n, \frac{1}{x}\}, \quad x \in (0, 1]$. Allora $f_n(x) \to_{n\to+\infty} \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (0, 1]$, ma la convergenza **non é uniforme** in $(0, 1]$. Infatti $\sup_{(0,1]} \frac{1}{x} = +\infty$ mentre

$\sup_{x\in E} |f_n(x)| < +\infty$, $f_n \to_{n\to\infty} f$ uniformemente in E $\Rightarrow$ $\sup_{x\in E} |f(x)| < +\infty$

5. $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2} \to_n f(x)$ ove $f(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Come in 4., la convergenza non é uniforme, ed é peró uniforme in $\{|x| \geq \delta > 0\}$:

$$|x| \geq \delta \Rightarrow |\frac{nx}{1+nx^2} - \frac{1}{x}| = \frac{1}{x^2(1+nx^2)}) \leq \frac{1}{\delta^2(1+n\delta^2)}).$$

Il criterio di Cauchy.

*f_n é uniformemente convergente in E se e solo f_n é " **Cauchy uniforme** ":*

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_\epsilon : \ n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\in E} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

NECESSITÁ: $f_n \to f$ uniformemente in E $\Rightarrow$
$\exists n_\epsilon : \ |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \ \forall x \in E$ se $n, m \geq n_\epsilon$.

SUFFICENZA: intanto, per ogni fissato x in E, la successione $n \to f_n(x)$ é di Cauchy, e quindi $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste finito per ogni x in E. Poi, $\forall\epsilon > 0, \exists n_\epsilon$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{n+p}(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \ \forall x \in E$$

se $n \geq n_\epsilon$ e quale che sia $p \in \mathbf{N}$. Fissato $n \geq n_\epsilon$ e mandando p all'infinito in $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \ \ \forall x \in E$ si ottiene $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \ \ \forall x \in E$ e per ogni $n \geq n_\epsilon$ cioé f_n converge uniformemente ad f.

Teorema 1 (la convergenza uniforme conserva la continuitá).

$$f_n \in C(E), \quad E \subset \mathbf{R}^n \quad f_n \to_n f \quad \text{uniformemente in} \quad E \quad \Rightarrow \quad f \in C(E)$$

Dimostrazione. Fissato $\epsilon > 0$ siano $n_\epsilon,\ \delta_\epsilon > 0$ tali che
$|f_{n_\epsilon}(x) - f(x)| \leq \epsilon,\ \forall x \in E, \qquad |f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x_0)| \leq \epsilon \quad \forall x \in E, \quad |x - x_0| \leq \delta_\epsilon.$

Allora $\qquad |f(x) - f(x_0)| \leq 3\epsilon, \qquad \forall x \in E,\ |x - x_0| \leq \delta_\epsilon$

NOTA. *É essenziale che la convergenza sia uniforme* . Controesempio: $f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1]$.

Teorema 2 (passaggio al limite sotto segno di integrale)

Sia $f_n \to_n f$ in (a,b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supponiamo vero che:

(i) la convergenza é uniforme su ogni $[\alpha, \beta] \subset (a,b)$
(ii) $\exists g : \ |f_n(x)| \leq g(x) \ \forall n,\ x$ con $\int\limits_a^b g < +\infty$ (**equidominatezza**)

Allora $\qquad \lim_n \int\limits_a^b f_n = \int\limits_a^b \lim_n f_n$

Prova. Fissato $\epsilon > 0$, esistono $a_\epsilon < b_\epsilon$ in (a,b) e n_ϵ tali che

$$\int\limits_a^{a_\epsilon} g + \int\limits_{b_\epsilon}^b g \leq \frac{\epsilon}{8}, \qquad \sup_{t \in [a_\epsilon, b_\epsilon]} |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

e quindi

$$\left| \int\limits_a^b f_n(t)dt - \int\limits_a^b f(t)dt \right| \leq 2\int\limits_a^{a_\epsilon} g + 2\int\limits_{b_\epsilon}^b g + \int\limits_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} |f_n(t) - f(t)|dt \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

Corollario

$$f_n \in C([a,b]), \quad f_n \to_n f \ \text{ uniformemente in } [a,b] \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

NOTA. **In generale**, $\qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$.

Esempio 1. Sia $f(x) := \frac{x}{1+x^4}$. Si ha che $f_n(x) := nf(nx) = \frac{n^2 x}{1+n^4x^4} \to_n 0 \ \forall x \in R$ ma $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^n f \to \int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^4} \neq 0$ mentre $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

In questo esempio la f_n non converge uniformemente in $[0,1]$. Converge peró uniformemente in $[\delta, 0]\ \forall\delta \in (0,1)$. Evidentemente f_n non é equidominata.

Esempio 2. Se $f \in C(\mathbf{R})$ é limitata ed integrabile in $\mathbf{R}$ con $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \neq 0$, é

$$f_n(x) := \frac{1}{n} f(\frac{x}{n}) \to_n 0 \quad \text{uniformemente in} \quad \mathbf{R} \quad \text{ma} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \neq 0$$

Evidentemente f_n non é equidominata.

Teorema 3 (il limite delle derivate é la derivata del limite).

Siano $f_k \in C^1(O), O$ aperto in $\mathbf{R}^n$. Supponiamo f_k convergano puntualmente a f in O, e che $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ convergano uniformemente a certe g_j in O. Allora

$$f \in C^1(O) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j} = g_j = \lim_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$$

Dimostrazione. Il Teorema Fondamentale del Calcolo assicura che

$$f_n(x+te_j) \ = \ f_n(x) + \int\limits_0^t \frac{d}{dt} f_n(x+\tau e_j) d\tau \ = f_n(x) + \int\limits_0^t \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x+\tau e_j) d\tau$$

In virtú della uniforme convergenza delle derivate, passando al limite si ottiene

$$f(x+te_j) \ = \ f(x) + \int\limits_0^t g_j(x+\tau e_j) d\tau$$

Ora, le g_j, limiti uniformi di successioni di funzioni continue, sono continue. Per il TFC le $t \to f(x+te_j)$ sono derivabili e $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+te_j) = \frac{d}{dt} f(x+te_j) = g_j(x+te_j)$.

NOTA. *La convergenza uniforme delle f'_n é essenziale.* Controesempio:

Se $f_n(x) := |x|^{1+\frac{1}{n}},\ x \in (-1,1)$, si ha

$$f'_n(x) = (1+\frac{1}{n}) \frac{x}{|x|} |x|^{\frac{1}{n}} \to_{n\to\infty} \frac{x}{|x|} \quad \forall x \neq 0, \qquad f'_n(0) \to_n 0$$

La convergenza non é quindi uniforme. Poi, $f_n(x) \to |x|,\ \forall\ x \in (-1,1)$, che non é derivabile in $x = 0$.

SERIE UNIFORMEMENTE CONVERGENTI. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ si dice uniformemente convergente in E se $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} a_j(x)$ converge uniformemente in E.

Criterio di Cauchy . $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge uniformemente in E se e solo se

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists n_\epsilon : \ n \geq n_\epsilon, p \in \mathbf{N} \ \Rightarrow \ \sup_{x \in E} \ |\sum_{j=n}^{n+p} a_j(x)| \ \leq \ \epsilon$$

ovvero $\sum_{n=N}^{\infty} a_n(x) \to_N 0$ uniformemente in E. In particolare,
$\sum_n f_n$ converge uniformemente in $E \ \Rightarrow \ f_n \to_n 0$ uniformemente in E.

Serie totalmente convergenti. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é totalmente convergente in E se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in E} \ |a_n(x)| \ < \ +\infty$$

Convergenza totale implica (assoluta) uniforme convergenza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in E} \ |a_n(x)| \ < \ +\infty \ \Rightarrow |\sum_{j=n}^{n+p} a_j(x)| \ \leq \ \sum_{j=n}^{n+p} |a_j(x)| \leq \sum_{j=n}^{n+p} \sup_{x \in E} \ |a_j(x)| \leq \epsilon \ \ \forall x \in E$$

NOTA. La convergenza totale é piú forte della convergenza uniforme. Esempi:

1. Se $a_n(x) \equiv \frac{(-1)^n}{n}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge, ovviamente in modo uniforme , ma non é totalmente convergente, perché $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| = +\infty$.

2. Sia $f_n = \chi_{[n-1,n)}$. É $\sum_{n=N}^{\infty} f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ e quindi la serie converge uniformemente in $\mathbf{R}$, mentre $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\mathbf{R}} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Criterio di Leibnitz. Se $0 \leq a_{n+1}(x) \leq a_n(x) \ \forall x \in E, \ n \in \mathbf{N}$, allora

$$\sup_{x \in E} \ a_n(x) \ \to_{n \to +\infty} 0 \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, a_n(x) \ \text{converge uniformemente in} \ E$$

Intanto, la serie converge puntualmente in E per il criterio di Leibnitz per le serie numeriche. La convergenza é anche uniforme perché

$$-a_{2n-1}(x) \leq \sum_{k=2n-1}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \leq 0, \quad a_{2n}(x) \geq \sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \geq 0 \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow$$

$$|\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \, a_k(x)| \ \leq \ a_n(x) \to_{n \to +\infty} 0 \quad \text{uniformemente in} \quad E$$

ESERCIZI E COMPLEMENTI.

Successioni di funzioni.

1 Fissato $p \in \mathbf{N}$, $f_n(x) := \frac{n \sin^p x}{x(1+n^2x^2)} \to_{n\to+\infty} 0, \ \forall x > 0$

La convergenza é uniforme in $[\delta, +\infty)$ per ogni $\delta > 0$:

$$x \geq \delta \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{n}{\delta(1+n^2\delta^2)} \to_{n\to+\infty} 0$$

Se $p \geq 3$, la convergenza é uniforme anche in $[0,1]$: $0 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x)| =$

$$|(\frac{\sin x}{x})^p \frac{nx^{p-1}}{1+n^2x^2}| \leq \frac{nx^{p-1}}{1+n^2x^2} \leq \frac{(nx)^2}{n(1+n^2x^2)} \leq \frac{1}{n}\,[\sup_{t\in\mathbf{R}} \frac{t^2}{1+t^2}] \to_{n\to+\infty} 0$$

Invece, se $p \leq 2$, la convergenza in $[0,1]$ non é uniforme:

$$\sup_{0<x\leq 1} |f_n(x)| \geq f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}n^2 \sin^p \frac{1}{n} \to \frac{1}{2} \quad \text{se} \quad p=2 \quad \text{e diverge se} \quad p=1$$

2 $f_n(x) := \int\limits_0^x \arctan nt\, dt \to_{n\to+\infty} = \frac{\pi}{2}x \ \forall x \geq 0$ uniformemente sui limitati.
Infatti, $0 \leq x \leq M \quad \Rightarrow \quad |\int_0^x \arctan nt dt - \frac{\pi}{2}x| \leq \int_0^M |\arctan nt - \frac{\pi}{2}| dt \to_{n\to\infty} 0$ giacché $\arctan nt \to_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}$ uniformemente in $\{|x| \geq \delta\}$ ed é equidominata in $[0,M]$ $\forall M$, perché é uniformemente limitata : $|\arctan nx| \leq \frac{\pi}{2}$.

3 Sia $r > 0$. $f_n(x) := \frac{n\,x^r}{1+n^2x^2} \to_{n\to\infty} 0 \quad \forall x \geq 0$ e la convergenza é uniforme in $[0,+\infty)$ sse $1 < r \leq 2$. Infatti,

$$r > 2 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\geq 0} f_n(x) \ = \ +\infty$$

$$1 < r \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\geq 0} \ f_n(x) \ = \ n^{1-r} \ \sup_{s\geq 0} \ \frac{s^r}{1+s^2} \to_n 0$$

$$0 < r \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\geq 0} \ f_n(x) \ = \ n^{1-r} \sup_{s\geq 0} \ \frac{s^r}{1+s^2} \geq \sup_{s\geq 0} \ \frac{s^r}{1+s^2}$$

Se $r \geq 2$ la convergenza é uniforme in $[0,M]$ $\forall M > 0$, perché $r \geq 2 \Rightarrow$

$$f'_n(x) := n \, \frac{x^{r-1}[r - n^2x^2(2-r)]}{(1+n^2x^2)^2} \ > \ 0 \ \forall x > 0 \ \Rightarrow \ \sup_{x\leq M} \ f_n(x) = f_n(M) \to_{n\to\infty} 0$$

Se $r \in (0,1]$, la convergenza é uniforme in $[\delta, +\infty)$ perché, per n grande,

$$x \geq \delta \quad \Rightarrow \quad x \geq \sqrt{\frac{r}{n^2(2-r)}} \quad \Rightarrow \quad f'_n(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\geq\delta} f_n(x) = f_n(\delta) \to_{n\to\infty} 0$$

4. $\quad f_n \to_{n\to\infty} f$ uniformemente in $[a,+\infty)$, $\quad f_n(x) \to_{x\to+\infty} 0 \;\; \forall n$

$$\Rightarrow \;\; f(x) \to_{x\to+\infty} 0$$

Infatti, $|f(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \le \epsilon + |f_n(x)|$ se $n \ge n_e$ e quindi

$$\limsup_{x\to+\infty} |f(x)| \le \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$

Esempio. $\quad e^{-\frac{x^2}{n}} \to_n 1 \quad \forall x,$ $\quad$ quindi la convergenza non é uniforme in $\mathbf{R}$.

5 (Successioni di funzioni monotone: un Teorema di Dini)
Siano $f_n \in C([a,b])$ *monotone.* *Se* $f_n(x) \to_{n\to+\infty} f(x)\, \forall x \in [a,b]$ *ed* f *é continua in* $[a,b]$, *allora la convergenza é necessariamente uniforme.*
Dimostrazione. Possiamo supporre le f_n non decrescenti (basta altrimenti considerare $-f_n$). Scriviamo

$$|f_n(x) - f(x)| \;=\; [\max\{f_n(x), f(x)\} \,-\, f(x)] \;+\; [\max\{f_n(x), f(x)\} \,-\, f_n(x)]$$

Notiamo che $\quad g_n(x) \;:=\; \max\{f_n(x), f(x)\}\quad$ é continua , non decrescente e

$$0 \;\le\; g_n(x) - f(x) \to_{n\to+\infty} 0 \quad \text{e} \quad 0 \;\le\; g_n(x) - f_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

La convergenza é uniforme, se no, eventualmente per una sottosuccessione,

$$\exists c > 0 : \;\; c \le m_n \;:=\; \max_{[a,b]} g_n - f \;=\; g_n(x_n) \;-\; f(x_n), \quad x_n \to_{n\to+\infty} x_0$$

Ora, $\quad \forall\ \epsilon > 0, \;\; \exists\ \delta_\epsilon : \quad |f(x) - f(y)| \;\le\; \epsilon \quad \forall\, x, y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$

Per n grande, $x_n \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e quindi, per monotonia,

$$m_n = g_n(x_n) - f(x_n) \;\le g_n(x_0 + \delta) \;-\; f(x_0 - \delta) \to_{n\to+\infty} 0$$

contraddizione. Argomento analogo per $g_n - f_n$.

6 (Convergenza monotona: un altro Teorema di Dini)
Siano $f_n \in C([a,b])$, $\quad f_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \quad \forall x \in [a,b]$. *Se* $\; f_{n+1}(x) \;\le\; f_n(x)$ $\forall x \in [a,b], n \in \mathbf{N}$, *allora* f_n *converge a uniformemente in* $[a,b]$.
Dimostrazione. Chiaramente le f_n sono funzioni non negative e

$$\exists\ x_n \in [a,b] \;: \quad 0 \le m_n \;:=\; \max_{x\in[a,b]} f_n(x) \;=\; f_n(x_n)$$

É $\quad m_{n+1} \;=\; f_{n+1}(x_{n+1}) \;\le\; f_n(x_{n+1}) \;\le\; f_n(x_n) \;=\; m_n$ ed $\;\exists x_0, n_k :\; x_{n_k} \to_{k\to+\infty} x_0.$

Fissato $\epsilon > 0$, sia $f_{n_\epsilon}(x_0) \leq \epsilon$. Siccome f_{n_ϵ} é continua in $x_0 \in [a,b]$,

$$\exists \delta_\epsilon : \quad f_{n_\epsilon}(x) \ \leq \ f_{n_\epsilon}(x_0) \ + \ \epsilon \ \leq \ 2\epsilon \quad \forall x \in [a,b] \cap [x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon]$$

Quindi, per $n_k > n_\epsilon$ tale che $x_{n_k} \in \cap[x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon]$, risulta

$$m_{n_k} \ = \ f_{n_k}(x_{n_k}) \ \leq \ f_{n_\epsilon}(x_{n_k}) \ \leq \ 2\epsilon \quad \text{e quindi} \quad m_{n_k} \to_{k \to +\infty} 0$$

e quindi, essendo m_n monotona, $m_n \to_{n \to +\infty} 0$.

CONTROESEMPI. Intanto, l'ipotesi di continuitá é addirittura necessaria.

I risultati non valgono su intervalli non chiusi: $f_n(x) = x^n$ in $[0,1)$. La funzione limite ($f \equiv 0$) é continua, le funzioni sono crescenti e convergono in modo decrescente al loro limite, ma la convergenza non é uniforme.
I risultati non valgono su intervalli non limitati: $f_n(x) = \arctan(x-n) \to_n -\frac{\pi}{2}$. Le f_n sono crescenti, convergono in modo decrescente al loro limite puntuale, ma il limite non é uniforme, perché $\sup_{\mathbf{R}} |\arctan(x-n) + \frac{\pi}{2}| = \pi$.

7. $f_n \to_n f$ unif. in E, $\sup\limits_{x \in E} |f(x)| < +\infty \ \Rightarrow \ \sup\limits_{n} \left(\sup\limits_{x \in E} |f_n(x)| \right) < +\infty$

Esempio. $\frac{1+n^4x^2+n^3x^4}{1+n^4x^2+x^6} \to_n 1 \quad \forall x \quad$ ma $\quad \sup\limits_{x \in \mathbf{R}} \frac{1+n^4x^2+n^3x^4}{1+n^4x^2+x^6} \geq \frac{1+n^6+n^7}{1+n^6+n^6} \to_n +\infty$ e quindi la convergenza non é uniforme.

8 (Teorema di Ascoli-Arzela') Siano $f_n \in C([a,b])$. Supponiamo che

(i) (**equilimitatezza**) $\quad \exists M > 0 : \quad \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x)| \ :\leq \ M \qquad \forall n \in \mathbf{N}$

(ii) (**equi uniforme continuitá**) $\quad \forall \epsilon, \ \ \exists \delta_\epsilon$ tale che:

$$|x - y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon, \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

Allora $\quad \exists \, n_k : \quad f_{n_k}$ converge uniformemente in $[a,b]$.

NOTA. La equiuniforme continuitá é certamente verificata se

$f_n \in C^1([a,b])$ ed esiste M' tale che $\sup_{x \in [a,b]} |f'_n(x)| \ :\leq \ M' \qquad \forall n \in \mathbf{N}$.

Infatti le f_n sono (Teorema del valor medio) Lipschitziane di costante M'

Schema di dimostrazione (nell'ipotesi in Nota)

(i) (**diagonalizzazione di Cantor**) Sia $D := \{x_j : \ j \in \mathbf{N}\}$ denso in $[a,b]$.

Allora $\exists \ \alpha_j \in \mathbf{R}, \ n_k < n_{k+1} : \quad f_{n_k}(x_j) \to_{k\to+\infty} \alpha_j \quad \forall \, j$

Infatti $|f_n(x_1)| \leq M \ \Rightarrow \ \exists \alpha_1, \ \phi_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strettamente crescente tale che

$|f_{\phi_1(k)}(x_1) - \alpha_1| \leq \frac{1}{k} \quad \forall \, k.$ Ugualmente,

$\exists \phi_2, \ \alpha_2 : \quad |f_{\phi_1(\phi_2(k))}(x_2) - \alpha_2| \leq \frac{1}{k} \quad \forall \, k.$ Notiamo che si ha anche

$|f_{\phi_1(\phi_2(k))}(x_1) - \alpha_1| \leq \frac{1}{\phi_2(k)} \leq \frac{1}{k}.$ Iterando, troviamo al passo j:

$$\exists \, \phi_j, \ \alpha_j : \quad |f_{\phi_1 \circ \ldots \circ \phi_j(k)}\,(x_i) - \alpha_i| \leq \frac{1}{k} \quad \forall \, k, \ \ i \leq j$$

Basta ora prendere $n_k = (\phi_1 \circ \ldots \circ \phi_k)(k)$

(ii) Sia $f(x_j) = \lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x_j)$. Si ha che

$$|f(x_i) - f(x_j)| \leq M|x_i - x_j| \ \forall i,j$$

e quindi f si prolunga ad una $\overline{f}$ Lipschitziana (di costante M) in tutto $[a,b]$.

Infatti $|f(x_i) - f(x_j)| \leq$

$$\leq |f(x_i) - f_{n_k}(x_i)| + |f_{n_k}(x_i) - f_{n_k}(x_j)| + |f_{n_k}(x_j) - f(x_j)| \leq$$
$$\leq M|x_i - x_j| + |f(x_i) - f_{n_k}(x_i)| + |f_{n_k}(x_j) - f(x_j)|, \qquad \forall i,j$$

Basta ora mandare k all'infinito.

(iii) $f_{n_k} \to_{k\to+\infty} \overline{f}$ uniformemente in $[a,b]$.

Infatti, fissato $\epsilon > 0$, siano $N \geq \frac{b-a}{\epsilon}$, $I_j := [a + (j-1)\frac{b-a}{N}, a + j\frac{b-a}{N}]$, $j = 1, \ldots, N$. Se $x \in [a,b]$, allora $x \in I_j$ per qualche j. Sia $x_j \in D \cap I_j$. Si ha

$$|f_{n_k}(x) - \overline{f}(x)| \leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_j)| + |f_{n_k}(x_j) - \overline{f}(x_j)| + |f(x_j) - \overline{f}(x)| \leq$$

$$\leq 2M\,\frac{b-a}{N} + |f_{n_k}(x_j) - \overline{f}(x)|$$

e quindi, da $k \geq k_{\epsilon, x_1, \ldots, x_N} \Rightarrow |f_{n_k}(x_j) - \overline{f}(x_j)| \leq \epsilon$, segue $|f_{n_k}(x) - \overline{f}(x)| \leq 2\epsilon$.