AM2: Tracce delle lezioni- Settimana XI

PROBLEMA DI CAUCHY: esistenza ed unicitá locale

TEOREMA (di Picard)

Sia $f \in C^1(O)$, O *aperto in* $\mathbf{R}^n$. *Sia* $\overline{B}_{2r}(x_0) \subset O$. *Siano*

$$M := \sup_{x \in \overline{B}_{2r}(x_0)} \|f(x)\|, \qquad k := \sup_{x \in \overline{B}_{2r}(x_0)} \|\nabla f(x)\|$$

Sia $\delta > 0$ *tale che* $\delta k < 1$, $\delta M < r$. *Allora: per ogni* $x \in B_r(x_0)$,

$\exists! \gamma^x \in C^1((-\delta, \delta), B_{2r}(x_0))$ *tale che* $\gamma^x(0) = x$, $\dot{\gamma}^x(t) = f(\gamma^x(t))$ $\forall t \in (\delta, \delta)$

Inoltre, γ^x *dipende in modo continuo da* x*:*

$$\|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \delta k} \|x - y\| \qquad \forall x, y \in B_r(x_0)$$

Prova. Ricordiamo che lo spazio vettoriale $C([-\delta, \delta], \mathbf{R}^n)$, munito della norma $\|\gamma\|_\infty = \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \|\gamma(t)\|$, é un Banach, e quindi

$$X := \{\gamma \in C([-\delta, \delta], \mathbf{R}^n) : \quad \|\gamma(t) - x\| \leq r \qquad \forall t \in [-\delta, \delta]\}$$

é spazio metrico completo (rispetto alla metrica indotta). Ora, fissato $x \in B_r(x_0)$,

$$\gamma \in X \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t) - x\| \leq r \quad \forall t \in [-\delta, \delta] \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t) - x_0\| \leq 2r \quad \forall t \in [-\delta, \delta]$$

Dunque é ben definita la funzione $f(\gamma(t))$, $t \in [-\delta, \delta]$ e quindi lo é la funzione

$$(T^x \gamma)(t) := x + \int_0^t f(\gamma(\tau)) d\tau, \qquad \gamma \in X$$

Chiaramente $T^x \gamma \in C([-\delta, \delta], \mathbf{R}^n)$ $\forall \gamma \in X$. Inoltre, $\gamma \in X \Rightarrow$

$$\|(T^x \gamma)(t) - x\| = \|\int_0^t f(\gamma(\tau)) d\tau\| \leq \left| \int_0^t \|f(\gamma(\tau))\| d\tau \right| \leq \delta M < r \quad \Rightarrow \quad T\gamma \in X$$

Infine, $\gamma, \beta \in X \quad \Rightarrow \quad \|T^x \gamma - T^x \beta\|_\infty \leq \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \| \int_0^t [f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))] \, d\tau\| \leq$

$$\leq \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \left| \int_0^t \|f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))\| d\tau \right| \leq k\delta \|\gamma - \beta\|_\infty$$

perché f é Lipschitziana di costante k in $\overline{B}_{2r}(x_0)$. Siccome $\delta k < 1$, T^x é una contrazione di X in sé e quindi, per il Teorema delle contrazioni

$$\exists\,!\gamma^x \in X : \qquad T^x\gamma^x = \gamma^x. \qquad\qquad \text{Notiamo che} \quad (T\gamma^x)(0) = x.$$

Dunque, γ^x é l'unica soluzione, definita in $[-\delta, \delta]$, del problema di Cauchy

$$\dot{\gamma}^x(t) = f(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta, \delta), \qquad \gamma^x(0) = x$$

Infine, $\|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty \;\le\; \|x - y\| \;+\; \sup\limits_{t\in[-\delta,\delta]} \left| \int_0^t \|f(\gamma^x(\tau)) - f(\gamma^y(\tau))\| d\tau \right| \;\le$

$$\|x - y\| + \delta k \|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty \le \frac{1}{1 - \delta k}\|x - y\| \qquad \forall x, y \in B_r(x_0)$$

PROBLEMA DI CAUCHY: Unicitá globale, soluzione massimale.

Proposizione 1. *Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R}^n)$, O aperto in $\mathbf{R}^n$. Siano $\gamma \in C^1((a, b))$ e $\beta \in C^1((\tilde{a}, \tilde{b}))$ soluzioni dello stesso problema di Cauchy*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

Se $(a, b) \subset (\tilde{a}, \tilde{b})$, allora $\gamma \equiv \beta$ in (a, b): β é un prolungamento della soluzione γ.

Prova. Per il Teorema di Picard, esiste $\delta > 0$ tale che $\gamma \equiv \beta$ in $|t| \le \delta$. Quindi

$$\bar{t} := \sup\{t : \quad \gamma(\tau) = \beta(\tau),\ \forall \tau \in [0, t]\}$$

é ben definito e maggiore o uguale a δ. Si tratta di mostrare che $\bar{t} = b$. Sia per assurdo $\bar{t} < b$. Per continuitá, é allora anche $\gamma(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$ e inoltre $\gamma(t), \beta(t)$ sono soluzioni dell'equazione differenziale in $(0, \bar{t}]$. Dunque γ, β sono entrambe soluzioni del medesimo problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(\bar{t}) = \gamma(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$$

e quindi coincidono anche in $[\bar{t}, \bar{t} + \sigma]$ per un $\sigma > 0$ piccolo, e quindi

$$\bar{t} := \sup\{t : \quad \gamma(\tau) = \beta(\tau),\ \forall \tau \in [0, t]\} \ge \bar{t} + \sigma$$

contraddizione. Dunque $\gamma \equiv \beta$ in $[0, b)$ e, analogamente, $\gamma \equiv \beta$ in $(a, 0]$).

Una soluzione non prolungabile si chiama **soluzione massimale**. La soluzione massimale é evidentemente unica ed il suo intervallo di definizione si chiama **intervallo massimale di esistenza** e si indica $(t^-(x_0), t^+(x_0))$, o semplicemente, se non vi é ambiguitá, (t^-, t^+).

Se $t^-(x_0) = -\infty$, $t^+(x_0) = +\infty$, diremo che il Problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = x_0$ ammette **soluzione globale** o per tutti i tempi.

ESEMPI.

Il problema di Cauchy $\dot{x} = x$, $x(0) = x_0$ ha come soluzione massimale $x(t) = x_0 e^t$, $t \in \mathbf{R}$

mentre il problema $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$ ha come soluzione massimale $x(t) = \frac{x_0}{1-tx_0}$, $t \in (-\infty, \frac{1}{x_0})$.

Proposizione 2. *Sia* $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [0, T)$. *Se*

$$M := \sup_{t \in [0,T)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty$$

allora γ *é prolungabile oltre* T.
In particolare, se $\gamma(t)$ *é soluzione massimale e* $\sup_{t \in (t^-, t^+)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty$ *(e quindi, a maggior ragione, se* γ *é limitata) allora* $t^- = -\infty, t^+ = +\infty$.

Prova. É $\|\gamma(t) - \gamma(s)\| = \|\int_s^t f(\gamma(\tau))d\tau\| \leq M|t-s| \quad \forall s, t \in [0, T)$ e quindi γ é uniformemente continua in $[0, T)$. Ne deriva che

$$\exists \quad \gamma(T) := \lim_{t \to T^-} \gamma(t) \quad \text{e} \quad \dot{\gamma}(T) = f(\gamma(T))$$

Detta allora $\hat{\gamma}$ la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $\hat{\gamma}(T) = \gamma(T)$, la funzione uguale a γ in $[0, T)$ ed uguale a $\hat{\gamma}$ in $[T, T+\delta]$ é di classe C^1 ed é soluzione del sistema differenziale in $[0, T+\delta]$.

Corollario 1. *Sia* $g \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ *tale che*

(i) $\{x : g(x) \leq g(x_0)\}$ é limitato $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$ $\quad (ii)$ $< \nabla g(x), f(x) > \ \leq 0 \quad \forall x$

Allora le soluzioni del sistema $\dot{x} = f(x)$ *sono definite per tutti i tempi positivi.*

Infatti, $\frac{d}{dt} g(x(t)) = < \nabla g(x(t)), \dot{x} > = < \nabla g(x(t)), f(x(t)) > \ \leq 0 \quad \forall t$ e quindi la traiettoria $x(t)$ si mantiene, per tutti i tempi positivi, nella regione limitata $\{g(x) \leq g(x_0)\}$ e quindi $t^+ = +\infty$.

Corollario 2. *Data* $g \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, *siano* $g^M := \{x : \ g(x) \le M\}$ *e* $\Sigma^M := \{x : \ g(x) = M\}$. *Se*

(i) $\quad g^M := \{x : g(x) \le M\}$ é limitato $\qquad (ii) \quad < \nabla g(x), f(x) > \ < 0 \quad \forall x \in \Sigma^M$

allora la soluzione del problema di Cauchy $\dot{x} = f(x) \quad x(0) = x_0$ *con* $g(x_0) \le M$ *é definita per tutti i tempi positivi.*

Infatti $g(x(t)) \le M \quad \forall t \in [0, t^+(x_0))$, giacché, se no, é ben definito

$T := \inf\{t > 0 : \quad g(x(t)) \ge M\}$ e quindi $g(x(t)) \le M \forall t \le T$ e $g(x(T)) = M$

Ma questo é assurdo perché, se $t < T$, $T - t$ piccolo, allora

$$(g \circ x)'(T) \ = < \nabla g(x(T)), x'(T) > = < \nabla g(x(T)), f(x(T)) > \quad < \quad 0 \quad \Rightarrow$$

$$g(x(t)) = g(x(T)) + (t - T) \left[< \nabla g(x(T)), f(x(T)) > + \circ (1) \right] \quad > \quad g(x(T)) = M$$

Esempio 1. Le soluzioni del sistema 2×2

$$\dot{x} = -x^3 y^2 \qquad\qquad \dot{y} = -2y^3 x^2$$

sono definite per tutti i tempi positivi: basta prendere $g(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ per ottenere

$$\frac{d}{dt} g(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = x\dot{x} + y\dot{y} = -x^4 y^2 - 2y^4 x^2 \le 0 \qquad \forall t$$

Invece, $t^- > -\infty$ quale che sia la condizione iniziale. Questo si puó vedere cosi':

$$\frac{d}{dt}[x(t)^2 y(t)^2] = 2xy^2 \dot{x} + 2yx^2 \dot{y} = -2xy^2(x^3 y^2) - 2yx^2(2y^3 x^2) = -6(x^2 y^2)^2$$

cioé $z(t) := x(t)^2 y(t)^2$ risolve $\dot{z} = -6z^2$ e quindi $z(t) = \frac{z(0)}{1+6z(0)t} \quad t \in (-\frac{1}{6z(0)}, +\infty)$. Siccome $z(0) = x(0)^2 y(0)^2$ e

$$\dot{x} = -x(x^2 y^2) = -x \frac{z(0)}{1 + 6z(0)t} \qquad\qquad \dot{y} = -2y(x^2 y^2) = -2y \frac{z(0)}{1 + 6z(0)t}$$

troviamo $\log \frac{x(t)}{x(0)} = - \int_0^t \frac{z(0)}{1+6z(0)s} ds$, $\qquad \log \frac{y(t)}{y(0)} = -2 \int_0^t \frac{z(0)}{1+6z(0)s} ds$, ovvero

$$x(t) = \frac{x(0)}{(1 + 6z(0)t)^{\frac{1}{6}}} \qquad y(t) = \frac{y(0)}{(1 + 6z(0)t)^{\frac{1}{3}}} \qquad t \in \left(-\frac{1}{6z(0)}, +\infty\right)$$

Eliminando t, troviamo $y = \frac{y(0)}{x(0)^2} x^2$. Ció segue anche da: $\frac{\dot{y}}{y} = -2x^2 y^2 = 2\frac{\dot{x}}{x}$ e quindi $\log \frac{y(t)}{y(0)} = 2 \log \frac{x(t)}{x(0)}$ cioé appunto $\frac{y(t)}{y(0)} = [\frac{x(t)}{x(0)}]^2$.

Sistemi gradiente: $\dot{x} = -\nabla F(x) \qquad F \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.

Per applicare i Corollari, basta prendere $g = F$: $\quad < \nabla g(x), f(x) > \quad = -\|\nabla F\|^2$ e dedurre che se $\quad \{x \in \mathbf{R}^n : \quad F(x) \le F(x_0)\}$ é limitato per ogni $x_0 \in \mathbf{R}^n$, allora le soluzioni sono definite per tutti i tempi positivi. In effetti si puó dire di piú:

se F é inferiormente limitata le soluzioni sono definite per tutti i tempi positivi.

Infatti, $\int_0^t \|\nabla F(x(\tau))\|^2 d\tau = -\int_0^t (F(x(\tau)))'\, d\tau = F(x(0)) - F(x(t)) \le F(x(0)) - \inf F \Rightarrow \|x(t) - x(s)\| = \| \int_s^t \dot{x}(\tau) d\tau\| \le \int_s^t \|\nabla F(x(\tau))\| d\tau \le |t-s|^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t \|\nabla F(x(\tau))\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le |t-s|^{\frac{1}{2}} (F(x(0)) - \inf F)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall s < t$ e quindi $x(t)$ é uniformemente continua. Si conclude come nella dimostrazione della Proposizione 2.

Esempio 2. Le soluzioni di $\qquad \dot{x} = xy^2(x^2 + y^2) \qquad \dot{y} = -yx^4(x^2 + y^2)$ sono definite $\forall t$: $\quad \frac{d}{dt}(\frac{x^4}{2} + y^2) = 2x^3\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x^4y^2(x^2 + y^2) - 2y^2x^4(x^2 + y^2) \equiv 0$ e quindi $\quad$ *g é costante lungo le traiettorie*, $\quad$ ovvero le traiettorie sono contenute negli insiemi di livello di g, che sono visibilmente limitati.

Sistemi Conservativi, Hamiltoniani. Il sistema $\qquad \dot{x} = f(x) \qquad$ si dice *conservativo* se esiste un *integrale primo* , ovvero una $G \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ tale che

$$< \nabla G(x), f(x) > \quad = 0 \quad \forall x, \quad \text{e quindi} \quad \dot{x} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} G(x(t)) = 0 \quad \forall t$$

cioé G é costante lungo le traiettorie (*G si conserva durante il moto*). Se le superfici di livello $\{G = cost\}$ sono limitate, le soluzioni del sistema sono definite per tutti i tempi. Un caso importante é dato dai *sistemi Hamiltoniani* a n gradi di libertá:

$$\dot{x} = H_y(x, y), \qquad \dot{y} = -H_x(x, y)$$

ove $\quad H \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n),\ H = H(x, y),\ x, y \in \mathbf{R}^n \quad$ é *funzione Hamiltoniana, o energia totale*; l'Hamiltoniana é un integrale primo:

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = H_x(x(t), y(t))\dot{x} + H_y(x(t), y(t))\dot{y} = -\dot{y}\dot{x} + \dot{x}\dot{y} \equiv 0$$

Una importante classe di sistemi Hamiltoniani é data dai *sistemi Newtoniani conservativi*

$$(*) \qquad \ddot{x} = -\nabla U(x) \qquad x \in C^2(I, \mathbf{R}^n)$$

che descrivono il moto di un corpo sollecitato da un *campo di forze conservativo* $F = -\nabla U$. Posto $y = \dot{x}$, il *sistema del secondo ordine* $(*)$ si riscrive in forma Hamiltoniana, con energia totale $H = \frac{1}{2}\|y\|^2 + U$.

Diseguaglianza di Gronwall e applicazioni *Sia* $0 \leq \varphi \in C([0,T), \mathbf{R})$. *Se esistono* $\exists A, B, C > 0$ *tali che* $\varphi(t) \leq A + Bt + C \int\limits_0^t \varphi(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0,T)$ *allora*

$$\varphi(t) \leq (A + BC^{-1})e^{Ct} - BC^{-1} \quad \forall t \in [0,T)$$

Prova. Sia $\psi(t) := A + Bt + C \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$. Si ha: $\varphi(t) \leq \psi(t)$ e $\dot{\psi}(t) = B + C\varphi(t) \leq B + C\psi(t)$ per ogni $t \in [0,T)$. Dunque

$$\left(e^{-Ct}\psi(t)\right)' = e^{-Ct}\left(\psi'(t) - C\psi(t)\right) \leq Be^{-Ct}$$

Integrando in $[0,t], t \in [0,T)$ otteniamo $e^{-Ct}\varphi(t) \leq e^{-Ct}\psi(t) \leq \psi(0) - BC^{-1}\left(e^{-Ct} - 1\right) = \left(\psi(0) + BC^{-1}\right) - BC^{-1}e^{-Ct} = \left(A + BC^{-1}\right) - BC^{-1}e^{-Ct}$

PROBLEMA DI CAUCHY: esistenza globale. *Sia* $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. *Se*

$$\exists B, C > 0 : \qquad \|f(x)\| \leq B + C\|x\| \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

allora le soluzioni del sistema differenziale $\dot{x} = f(x)$ *sono definite globalmente.*

PROVA. Sia $\gamma'(t) = f(\gamma(t))$ soluzione massimale. Integrando, troviamo

$$\|\gamma(t)\| \leq \|\gamma(0)\| + \int\limits_0^t \|f(\gamma(\tau))\| d\tau \leq \|\gamma(0)\| + Bt + C\int\limits_0^t \|\gamma(\tau)\| d\tau \quad \forall t < t^+$$

e allora, per Gronwall, $\|\gamma(t)\| \leq (\|\gamma(0)\| + BC^{-1})e^{Ct} - BC^{-1}, \quad \forall t < t^+$ e quindi $t^+ = +\infty$ in virtú della Proposizione 2. Se poi $\beta(t) := \gamma(-t)$, é $\dot{\beta}(t) = -\dot{\gamma}(-t) = -f(\gamma(-t)) = -f(\beta(t)), \forall t \in (-t^+, -t^-)$ e per quanto appena provato $-t^- = +\infty$.

PROBLEMA DI CAUCHY: Dipendenza continua dai dati iniziali

Sia $f \in Lip\,(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, *cioé* $\exists L > 0 : \quad \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n$. *Se* $\gamma(t), \beta(t), \quad t \in [0,T]$ *risolvono* $\dot{x}(t) = f(x(t))$ *allora*

$$\|\gamma(t) - \beta(t)\| \leq \|\gamma(0) - \beta(0)\|e^{Lt} \qquad \forall t \in [0,T]$$

PROVA. Segue, applicando Gronwall, da $\|\gamma(t) - \beta(t)\| \leq$

$$\leq \|\gamma(0) - \beta(0)\| + \int\limits_0^t \|f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))\| d\tau \leq \|\gamma(0) - \beta(0)\| + L\int\limits_0^t \|\gamma(\tau) - \beta(\tau)\| d\tau$$

NOTA. Si puó provare che : se $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $\dot{x}(t) = f(x(t)), t \in [0,T]$, allora esistono $\delta > 0$ ed $L > 0$ tali che la soluzione del problema di Cauchy $\gamma'(t) = f(\gamma(t)), \gamma(0) = x$ é definita in $[0,T]$ e $\|\gamma(t) - x(t)\| \leq \|\gamma(0) - x(0)\|e^{Lt}$ per ogni $t \in [0,T]$, se $\|x - x(0)\| \leq \delta$.