Am120 – Tutorato VII

Integrazione funzioni irrazionali, integrali definiti

Mercoledì 28 Aprile 2010

Filippo Cavallari

Esercizio 1 Calcolare i seguanti integrali utilizzando le sostituzioni suggerite:

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \qquad x = a \sin t$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx \qquad x = a \sinh t$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx \qquad x = a \cosh t$

(4) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \qquad x = a \sin t$

(5) $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx \qquad x = a \sinh t$

(6) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx \qquad x = a \cosh t$

(Ricordiamo che $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ *e* $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$*)*

Nota Nell'esercizio che segue saranno utili le seguenti considerazioni: negli integrali contenenti $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ci si può sempre ricondurre a uno dei sei tipi dell'esercizio 1. Infatti distinguiamo due casi:

- Se $\boxed{b^2 - 4ac > 0}$ è possibile trasformare $ax^2 + bx + c$ nella differenza di due quadrati. Infatti $ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\left(4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - b^2\right) = \frac{1}{4a}\left[(2ax + b)^2 - \left(b^2 - 4ac\right)\right]$
- Se $\boxed{b^2 - 4ac < 0}$ è possibile trasformare $ax^2 + bx + c$ nella somma di due quadrati. Infatti $ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\left[(2ax + b)^2 + \left(-b^2 + 4ac\right)\right]$

Esercizio 2 Calcolare i seguenti integrali irrazionali:

(1) $\int \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx$

(2) $\int \frac{1 - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} dx$

(4) $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}} dx$

(5) $\int \sqrt{x^2 + 4x + 13}\, dx$

(6) $\int \sqrt{-x^2 - x + 1}\, dx$

(7) $\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 10}} dx$

(8) $\int \frac{x^3 + x}{\sqrt{-x^4 + 3x^2 - 2}} dx$

Esercizio 3 Calcolare i seguenti integrali definiti:

(1) $\int_1^3 |x-2|\,dx$ (2) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$ (3) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$

(4) $\int_2^3 \ln\left(x^2-x\right)dx$ (5) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ (6) $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$

Esercizio 4 Sia $f(x)$ una funzione integrabile nell'intervallo $[0;5]$ tale che $\int_0^5 f(x)\,dx = 10$.

Dimostrare che:

(a) esiste $x_0 \in [0;5]$ tale che $f(x_0) < 3$
(b) se $f(x)$ è continua in $[0;5]$ allora esiste $x_0 \in [0;5]$ tale che $f(x_0) = 2$
(c) se $f(x)$ è strettamente monotona in $[0;5]$ allora esiste $x_0 \in [0;5]$ tale che $f(x_0) < 2$

Esercizio 5 Data una parabola di equazione $y = ax^2$ con $a > 0$ e una retta *r* parallela all'asse delle x che giace sul semipiano $y > 0$, la superficie *S* racchiusa dalla parabola e dalla retta prende il nome di segmento parabolico. Calcolare l'area del segmento parabolico e dimostrare che è equivalente ai $2/3$ del rettangolo ad esso circoscritto.

Esercizio 6 Determinare l'area della regione piana delimitata dall'asse *x* e dalle due parabole di equazione $p_1 : y = x^2 + 4x + 4$ e $p_2 : y = x^2 - 4x + 4$.

Esercizio 7 Dimostrare che:

(a) Se *f* è pari allora $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ è dispari

(b) Se *f* è dispari allora $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ è pari

Esercizio 8 Mostrare con un esempio che se *f* è T-periodica allora $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ può non esserlo. Stabilire eventuali condizioni necessarie e/o sufficienti affinché ciò accada.