

Am120 – Tutorato V

Integrali per sostituzione e per parti

Mercoledì 31 Marzo 2010

Filippo Cavallari

Esercizio 1 Calcolare i seguenti integrali per sostituzione:

(1) $\int \tan x dx$

(2) $\int \frac{1}{\tan x} dx$

(3) $\int \pi^x dx$

(4) $\int \frac{10x^4 + 12x^3 - 8}{2x^5 + 3x^4 - 8x} dx$

(5) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

(6) $\int \frac{1}{\cos x \sin x} dx$

(7) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

(8) $\int \frac{\sin^8 x}{\tan x} dx$

(9) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

(10) $\int e^{3x} \sqrt{1 + e^{3x}} dx$

(11) $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$

(12) $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx$

(13) $\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} dx$

(14) $\int x(3x^2 - 7)^{11} dx$

(15) $\int \frac{x^2}{\arcsin x^3 \sqrt{1-x^6}} dx$

(16) $\int \frac{1}{x + x \ln^2 x} dx$

(17) $\int \frac{\tan^2 \sqrt{x} + \tan^4 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

(18) $\int \frac{\ln(\arctan x)}{\arctan x(1+x^2)} dx$

Esercizio 2 Dimostrare per induzione che $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3 Calcolare i seguenti integrali utilizzando la formula di integrazione per parti:

(1) $\int \cos^2 x dx$

(2) $\int e^x \sin x dx$

(3) $\int x^3 \sin x dx$

(4) $\int x^4 e^x dx$

(5) $\int x^2 \ln x dx$

(6) $\int \arcsin x dx$

(7) $\int \arctan x dx$

(8) $\int \ln^2 x dx$

Esercizio 4 Trovare delle formule iterative per calcolare i seguenti integrali:

(1) $\int \sin^n x dx$

(1) $\int \cos^n x dx$

Esercizio 5 Esistono funzioni continue, non identicamente nulle, il cui integrale definito, esteso ad un intervallo $[a;b]$ con $a < b$, valga zero?

Esercizio 6 Esistono funzioni integrabili (secondo Riemann), non identicamente nulle e non negative, nell'intervallo $[a;b]$ con $a < b$, tali che il loro integrale definito su tale intervallo sia nullo? Tra queste funzioni quali sono continue?

Esercizio 7 Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x = \frac{m}{n} \text{ con } m, n \text{ primi fra loro} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

è integrabile in $[0;1)$ e risulta $\int_0^1 f(x) dx = 0$

Esercizio 8 Esistono funzioni $f(x)$ tali che $|f(x)|$ è integrabile (secondo Riemann) ma $f(x)$ non lo è?

Esercizio 9 Calcolare, utilizzando la definizione, i seguenti integrali:

$$(1) \int_0^a x^3 dx \quad a > 0$$

$$(2) \int_1^a \frac{1}{x} dx \quad a > 1$$