Am120 – (alcune…) Soluzioni Tutorato III

Teoremi di Rolle, Lagrange, Cauchy e De L'Hôpital. Studio di funzioni

Mercoledì 18 Marzo 2008

Filippo Cavallari

Esercizio 1 Le funzioni elencate sono derivabili negli intervalli considerati in quanto sono somma, prodotto e composizione di funzioni derivabili. Inoltre esse assumono lo stesso valore agli estremi dei rispettivi intervalli (verifica che viene omessa). Siamo quindi nelle ipotesi del teorema di Rolle. Troviamo esplicitamente i valori per i quali hanno derivata nulla negli intervalli indicati:

(1) $f'(x)=2x-3$ quindi $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

(2) $f'(x)=3x^2+10x-6$ quindi $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5+\sqrt{43}}{3}$.

(3) $f'(x)=2\sin x\cos x$ quindi $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$.

(4) $f'(x)=-2\sin x\cos x$ quindi $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Esercizio 2 È immediato verificare che $f(-1)=f(1)=0$. Dal calcolo diretto segue inoltre che $f'(x)=-\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$ $\forall x\in[-1,0)\cup(0,1]$ che non si annulla mai, mentre nell'origine la funzione non è derivabile. Per questo il teorema di Rolle non si può applicare.

Esercizio 3 La funzione è derivabile in $[0,1]$ in quanto somma e prodotto di funzioni derivabili. Siamo quindi nelle ipotesi del teorema di Lagrange. Dato che $f'(x)=2-2x$, segue $2-2c=f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$ e quindi $c=\frac{1}{2}$.

Esercizio 4 La funzione è derivabile in $[0,b]$ e quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange. Risulta quindi che $nc^{n-1}=f'(c)=\frac{f(b)-f(0)}{b-0}=b^{n-1}$ e quindi $c=\frac{b}{\sqrt[n-1]{n}}$.

Esercizio 5 Per il teorema di Lagrange esiste $c\in(1,2)$ tale che

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}=f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\sqrt[3]{2}-1$$

Dato che la funzione $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ è decrescente e ovviamente $\sqrt[3]{4}<4$, segue che

$$\frac{1}{12} < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} = f'(2) < \sqrt[3]{2} - 1 < f'(1) = \frac{1}{3}$$

da cui la tesi.

Esercizio 6 (1) Distinguiamo due casi: se $x \geq 0$ allora per il teorema di Lagrange risulta $\frac{e^x - 1}{x} = e^c$ con $c \in [0, +\infty)$ e nell'intervallo considerato $e^c \geq 1$; il caso $x < 0$ è analogo.

(2) Considerata la funzione $f(x) = x^n$ per $x \in [a, b]$ dal teorema di Lagrange segue $\frac{b^n - a^n}{b - a} = nc^{n-1} < nb^{n-1}$ da cui la tesi.

Esercizio 7 Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $[1, 2]$ e quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Cauchy. Pertanto risulta

$$\frac{2c}{3c^2} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{4-1}{8-1} = \frac{3}{7} \text{ con } c \in [1, 2]$$

da cui $c = \frac{14}{9}$.

Esercizio 8 (1) Posto $f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ dal calcolo diretto si ottiene che $f'(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Pertanto, poiché $f(0) = 0$, risulta $f(x) \equiv 0$ cioè la tesi.

(2) Posto $f(x) = \arccos x + \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{2}$ dal calcolo diretto si ottiene che $f'(x) = 0 \ \forall x \in (-1, 1)$. Pertanto, poiché $f(0) = 0$, risulta $f(x) \equiv 0$ cioè la tesi.