Am120 – Soluzioni Tutorato II

Derivate

Mercoledì 10 Marzo 2010

Filippo Cavallari

Esercizio 1 Notiamo innanzitutto che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono limitate in quanto $|\sin x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$ per qualsiasi valore di *x*. Inoltre la funzione x^c definita nell'intervallo $[-1,1]$ è limitata se e solo se $c \geq 0$.

(1) $f(x)$ è continua se $\lim_{x\to 0} x^\alpha \sin\frac{1}{x^\beta} = 0$ per cui $\alpha > 0$.

(2) $f'(0)$ esiste se $\lim_{h\to 0} h^{\alpha-1}\sin\frac{1}{h^\beta}$ esiste finito cioè se $\alpha > 1$ nel qual caso $\lim_{h\to 0} h^{\alpha-1}\sin\frac{1}{h^\beta} = 0$.

(3) Nel caso in cui $\alpha > 1$, cioè quando la derivata prima esiste $\forall x \in [-1,1]$, dal calcolo diretto si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^\beta} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

che è limitata se e soltanto se $\alpha \geq 1+\beta$.

(4) $f'(x)$ è continua se e soltanto se $\lim_{x\to 0} \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^\beta} = 0$ cioè se $\alpha > 1+\beta$.

(5) $f''(0)$ esiste se $\lim_{h\to 0} \alpha h^{\alpha-2}\sin\frac{1}{h^\beta} - \beta h^{\alpha-\beta-2}\cos\frac{1}{h^\beta}$ esiste finito cioè se $\alpha > \beta+2$ nel qual caso $\lim_{h\to 0} \alpha h^{\alpha-2}\sin\frac{1}{h^\beta} - \beta h^{\alpha-\beta-2}\cos\frac{1}{h^\beta} = 0$.

(6) Nel caso in cui $\alpha > \beta+2$, cioè quando la derivata seconda esiste $\forall x \in [-1,1]$, dal calcolo diretto si ottiene

$$f''(x) = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x^\beta} - \alpha\beta x^{\alpha-\beta-2}\cos\frac{1}{x^\beta} - \beta(\alpha-\beta-1)x^{\alpha-\beta-2}\cos\frac{1}{x^\beta} - \beta^2 x^{\alpha-2\beta-2}\sin\frac{1}{x^\beta} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

che è limitata se e soltanto se $\alpha \geq 2+2\beta$.

(7) $f''(x)$ è continua se e soltanto se

$$\lim_{x\to 0} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x^\beta} - \alpha\beta x^{\alpha-\beta-2}\cos\frac{1}{x^\beta} - \beta(\alpha-\beta-1)x^{\alpha-\beta-2}\cos\frac{1}{x^\beta} - \beta^2 x^{\alpha-2\beta-2}\sin\frac{1}{x^\beta} = 0$$

cioè se $\alpha > 2+2\beta$.

Esercizio 2 (1) Posto $f(x)=x-\sin x$ si ha che $f(0)=0$ e che $f'(x)=1-\cos x\geq 0 \quad \forall x>0$

Analogamente posto $f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$ si ha che $f(0)=0$ e che $f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$ la quale è non negativa perché $f'(0)=0$ e derivandola si riconduce alla disuguaglianza precedente.

(2) Posto $f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$ la tesi segue dall'esercizio precedente.

(3) Posto $f(x)=x+\sin x-2\left(e^x-1\right)$ si ottiene $f(0)=0$ e $f'(x)\leq 0 \quad \forall x\geq 0$.

(4) Posto $f(x)=x^{x-1}$ si ha $f(1)=1$. Se $x>1$ allora $x-1>0$ e quindi $f(x)=x^{x-1}>1$.

Analogamente se $x<1$ allora $x-1<0$ e quindi $f(x)=x^{x-1}>1$.

Esercizio 3 Se $y=0$ la tesi è ovvia. Supponiamo quindi $y>0$. Raccogliendo y^p otteniamo

$$y^p\left(\frac{x^p}{y^p}+1\right)\leq y^p\left(\frac{x}{y}+1\right)^p\leq y^p 2^{p-1}\left(\frac{x^p}{y^p}+1\right)$$

e quindi, dividendo per y^p, si ha

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p+1\leq\left(\frac{x}{y}+1\right)^p\leq 2^{p-1}\left[\left(\frac{x}{y}\right)^p+1\right]$$

posto $t=\frac{x}{y}$ dobbiamo dunque mostrare che

$$t^p+1\leq(t+1)^p\leq 2^{p-1}\left(t^p+1\right)\quad \forall t\geq 0 \tag{0.1}$$

Posto $f(t)=(t+1)^p-t^p-1$, dato che $f'(t)=p\left[(t+1)^{p-1}-t^{p-1}\right]>0$ (in quanto la funzione $h(t)=t^r$ è strettamente crescente se $r>0$), allora f è crescente. Essendo $f(0)=0$ risulta provata la prima disuguaglianza di (0.1).

Posto $g(t)=2^{p-1}\left(t^p+1\right)-(t+1)^p$, dato che $g'(t)=p\left[(2t)^{p-1}-(t+1)^{p-1}\right]$, si ha che

$$\begin{aligned}
&g'(t)<0 \quad && 0\leq t<1;\\
&g'(t)=0 \quad && t=1;\\
&g'(t)>0 \quad && t>1.
\end{aligned}$$

Dunque il punto $t=1$ è un minimo per g. Pertanto $0=g(1)\leq g(t)$ cioè la seconda disuguaglianza di (0.1).

Esercizio 4 Posto $f(t)=\frac{t}{1+t}$ si ha che $f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0 \quad \forall t\geq 0$. Ne segue che la funzione è crescente $\forall t\geq 0$. Ricordando la disuguaglianza triangolare, $|a+b|\leq |a|+|b|$, ne segue che $f(|a+b|)\leq f(|a|+|b|)$ e cioè

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}.$$

Osserviamo ora che $1+|a|+|b|\geq 1+|a|$ e $1+|a|+|b|\geq 1+|b|$, pertanto si ha

$$\frac{1}{1+|a|+|b|}\leq \frac{1}{1+|a|}, \quad \frac{1}{1+|a|+|b|}\leq \frac{1}{1+|b|}$$

da cui si ottiene

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq \frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

cioè la tesi.