Am120 – Tutorato II

Derivate

Mercoledì 10 Marzo 2010

Filippo Cavallari

Esercizio 1 Dati $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ con $\beta>0$ definiamo nell'intervallo $\left[-1,1\right]$ la funzione

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\left(\dfrac{1}{x^{\beta}}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

Provare che:

(1) f è continua se e solo se $\alpha>0$
(2) $f'\left(0\right)$ esiste se e solo se $\alpha>1$
(3) f' è limitata se e solo se $\alpha\geq 1+\beta$
(4) f' è continua se e solo se $\alpha>1+\beta$
(5) $f''\left(0\right)$ esiste se e solo se $\alpha>2+\beta$
(6) f'' è limitata se e solo se $\alpha\geq 2+2\beta$
(7) f'' è continua se e solo se $\alpha>2+2\beta$

Esercizio 2 Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

(1) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x \quad \forall x>0$

(2) $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2} \quad \forall x\neq 0$

(3) $x+\sin x\leq 2\left(e^x-1\right) \quad x\geq 0$

(4) $x^x\geq x \quad x>0$

Esercizio 3 Dimostrare che se $x,y\geq 0$ e $p>1$ allora $x^p+y^p\leq\left(x+y\right)^p\leq 2^{p-1}\left(x^p+y^p\right)$

(Suggerimento: posto $t=\dfrac{x}{y}\ldots$*)*

Esercizio 4 Mostrare che $\forall a,b\in\mathbb{R}$ si ha che

$$\frac{\left|a+b\right|}{1+\left|a+b\right|}\leq\frac{\left|a\right|}{1+\left|a\right|}+\frac{\left|b\right|}{1+\left|b\right|}$$

(Suggerimento: considerare la funzione $f\left(t\right)=\dfrac{t}{1+t}\ldots$*)*