Am120 – Soluzioni Tutorato I

Derivate

Mercoledì 3 Marzo 2010

Filippo Cavallari

Esercizio 1 In tutti i casi calcoleremo il limite del rapporto incrementale:

(1) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}-\dfrac{1}{x(x+h)}=-\dfrac{1}{x^2}$

(2) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(3) Ricordando che $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ e notando che $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim_{y\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cos x=1$ si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\tan x+\tanh}{1-\tan x\tanh}-\tan x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\tanh+\tan^2 x\tanh}{h(1-\tan x\tanh)}$$
$$=\left(1+\tan^2 x\right)\lim_{h\to 0}\frac{\tanh}{h}\frac{1}{1-\tan x\tanh}=1+\tan^2 x$$

(4) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k h^{n-k}-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k h^{n-k-1}=\binom{n}{n-1}x^{n-1}=nx^{n-1}$

Esercizio 2 Utilizzando la regola di derivazione del prodotto si ottiene:

$$(fgh)'(x_0)=(fg)'(x_0)h(x_0)+(fg)(x_0)h'(x_0)=\left[f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\right]h(x_0)+(fg)(x_0)h'(x_0)=$$
$$=f'(x_0)g(x_0)h(x_0)+f(x_0)g'(x_0)h(x_0)+f(x_0)g(x_0)h'(x_0)$$

Esercizio 3 Si ottiene

(1) $\dfrac{1}{x}$

(2) rx^{r-1}

(3) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(4) $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(5) $\dfrac{1}{1+x^2}$

(6) $\cos\left(3x^3+4^x\right)\cdot\left(9x^2+4^x\ln 4\right)$

(7) $e^x\left(1+2x+x^2+21x^6+3x^7\right)$

(8) $2x\cdot\ln 7\cdot 7^{x^2+4}$

(9) $\cos\left(\pi^{\tan x}\right)\cdot\pi^{\tan x}\cdot\dfrac{\ln\pi}{\cos^2 x}$

(10) $\ln x\cdot\sin x+\sin x+x\cdot\ln x\cdot\cos x$

(11) $e^{\sin\left(e^x\right)}\cdot\cos\left(e^x\right)\cdot e^x$

(12) $\dfrac{adx^2+2aex+be-cd}{\left(dx+e\right)^2}$

(13) $\left[\dfrac{2}{\left(x+3\right)^2}+\dfrac{x+1}{x+3}\sin x\right]e^{-\cos x}$

(14) $\dfrac{1+\cos\left(\ln x\right)}{x\left[x+\sin\left(\ln x\right)\right]}$

(15) $2xe^{x^2+1}\left[\ln\left(x^2+1\right)+\dfrac{1}{x^2+1}\right]$

(16) $\dfrac{\left(2\sin x\cos x-\sin x\right)\ln x}{\ln^2 x}-\dfrac{\sin^2 x+\cos x}{x\ln^2 x}$

(17) $\cos\left(\dfrac{\ln x}{x^3+4}\right)\cdot\left[\dfrac{1}{x\left(x^3+4\right)}-\dfrac{3x^2\ln x}{\left(x^3+4\right)^2}\right]$

(18) $2\ln\left(\arcsin x\right)\cdot\dfrac{1}{\arcsin x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(19) $\dfrac{5x^4+\pi x^{\pi-1}}{\left(x\ln 2\right)\left[1+\left(x^5+x^\pi\right)^2\right]}-\dfrac{\arctan\left(x^5+x^\pi\right)}{x^2\ln 2}$

(20) $e^{\tan x}\left[\cos\left(30x^3-x^7\right)\cdot\left(90x^2-7x^6\right)+\sin\left(30x^3-x^7\right)\cdot\left(1+\tan^2 x\right)\right]$

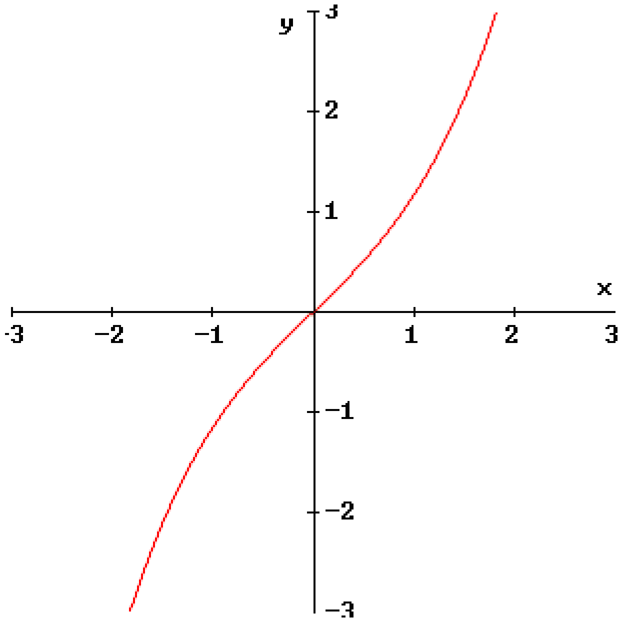
Esercizio 4

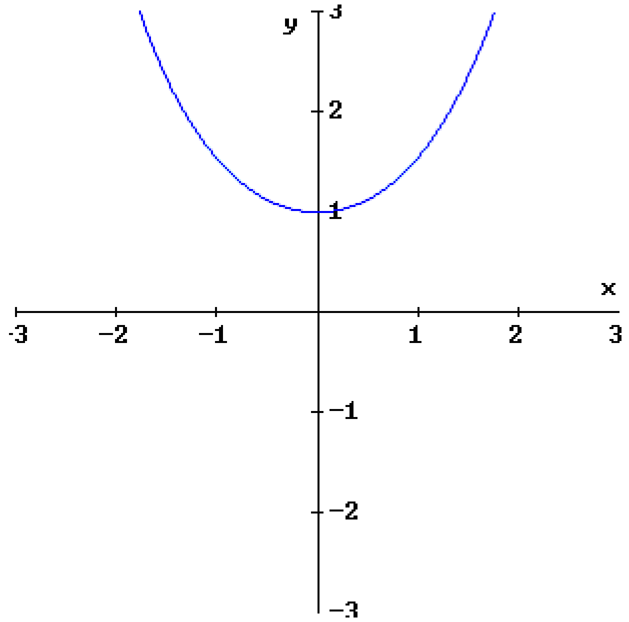
- $y=|x|$
- $y=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$
- $y=\sqrt[3]{x}$
- $y=|x|$

Esercizio 5 Dall'ipotesi si ricava che $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|^\alpha \Rightarrow 0\leq\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leq|x-y|^{\alpha-1}$ e quindi facendo tendere y ad x e applicando il teorema dei carabinieri si ottiene che $0\leq\lim_{y\to x}\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leq\lim_{y\to x}|x-y|^{\alpha-1}=0$ perché $\alpha>1$ quindi $f'(x)=0\quad\forall x\in\mathbb{R}$ cioè la funzione è costante.

Esercizio 6

a. È immediato verificare dalla definizione che $\sinh(-x)=-\sinh(x)$ e $\cosh(-x)=\cosh(x)$, cioè il seno iperbolico è dispari e il coseno iperbolico è pari. Riportiamo i grafici delle due funzioni:





$y = \sinh x$ $\qquad\qquad$ $y = \cosh x$

b. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$

c. Applicando le regole di derivazione si vede facilmente che

$(\sinh x)' = \cosh x$ $\qquad\qquad$ $(\cosh x)' = \sinh x$

d. Applicando la regola di derivazione di funzione inversa si ricava che

$\left(\sinh^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $\qquad\qquad$ $\left(\cosh^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

e. Posto $s(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ e $c(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ si ha che $s'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ e $c'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Quindi da $s(0) = \sinh^{-1}(0) = 0$ $\quad c(1) = \cosh^{-1}(1) = 0$ segue l'asserto

f. $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

g. Si ottiene

(1) $\cosh(\cosh(\sinh x)) \cdot \sinh(\sinh x) \cdot \cosh x$

(2) $\cosh\left(\dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{7^x}\right) \cdot \dfrac{\left(3x^2 + 2x + 1\right) - \ln 7\left(x^3 + x^2 + x + 1\right)}{7^x}$

(3) $e^{\sinh(\arctan x)} \cdot \cosh(\arctan x) \cdot \dfrac{1}{1 + x^2}$

Esercizio 7

(1) Dato che risulta $f(0)=3$ $\lim_{x\to 0^+} ax^2+bx+3=3$ $\lim_{x\to 0^-} 7e^x-4=3$ la funzione è continua $\forall a,b\in\mathbb{R}$. Inoltre poiché $\lim_{x\to 0^+} 2ax+b=b$ $\lim_{x\to 0^-} 7e^x=7$ la funzione è derivabile nell'origine se $b=7$.

(2) Dato che risulta $f(1)=\frac{4a+b}{2}$ $\lim_{x\to 1^+}\frac{4a+b}{x^2+1}=\frac{4a+b}{2}$ $\lim_{x\to 1^-} x^2+2x(a+b)-1=2(a+b)$ la funzione è continua se $b=0$. Inoltre poiché $\lim_{x\to 1^+}\frac{-8ax}{(x^2+1)^2}=-2a$ $\lim_{x\to 1^-} 2x+2a=2+2a$ la funzione è derivabile nell'origine se $a=-\frac{1}{2}$

Esercizio 8 In tutti i casi utilizzeremo il metodo di dimostrazione per induzione:

(1) Base induttiva: $\frac{d}{dx}x^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}$

Passo induttivo: supponiamo che

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}x^\alpha=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+2)x^{\alpha-n+1}$$

e quindi

$$\frac{d^n}{dx^n}x^\alpha=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}x^\alpha\right)=\frac{d}{dx}\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+2)x^{\alpha-n+1}=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

cioè la tesi.

(2) Base induttiva: dalle formule di addizione del seno si ottiene che

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x=\frac{d}{dx}\sin x$$

Passo induttivo: supponiamo che

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\sin x=\sin\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

e quindi

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\sin x\right)=\frac{d}{dx}\sin\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

cioè la tesi.

(3) Base induttiva: dalle formule di addizione del coseno si ottiene che

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x=\frac{d}{dx}\cos x$$

Passo induttivo: supponiamo che

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\cos x=\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

e quindi

$$\frac{d^{n}}{dx^{n}}\cos x=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\cos x\right)=\frac{d}{dx}\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

cioè la tesi.

(4) Base induttiva: $\frac{d}{dx}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a(cx+d)-(ax+b)c}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Passo induttivo: supponiamo che

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{ax+b}{cx+d}=(-1)^{n-2}c^{n-2}(n-1)!\frac{ad-bc}{(cx+d)^n}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\frac{d^{n}}{dx^{n}}\frac{ax+b}{cx+d}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{ax+b}{cx+d}\right)=\frac{d}{dx}\left((-1)^{n-2}c^{n-2}(n-1)!\frac{ad-bc}{(cx+d)^n}\right)=\\&=(-1)^{n-2}c^{n-2}(n-1)!(ad-bc)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(cx+d)^n}\right)=\\&=(-1)^{n-2}c^{n-2}(n-1)!(ad-bc)\frac{-nc}{(cx+d)^{n+1}}\\&=(-1)^{n-1}c^{n-1}n!\frac{ad-bc}{(cx+d)^{n+1}}\end{aligned}$$

cioè la tesi.

Esercizio 9 Notiamo che la funzione è continua $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ in quanto prodotto e composizione di funzioni continue. Affinché $f(x)$ è continua nell'origine deve risultare che $\lim_{x\to0}x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}=0$ e quindi $\alpha>0$. Analogamente funzione è derivabile $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Affinché lo sia anche nell'origine deve esistere finito il limite del rapporto incrementale. Osserviamo che

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\alpha}\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h^{\alpha-1}\sin\frac{1}{h}$$

che non esiste se $0<\alpha\le 1$ ed è uguale 0 se $\alpha>1$ (il caso $\alpha\le 0$ non lo consideriamo perché la funzione non è neanche continua!). Infine usando le regole di derivazione si ottiene che:

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}\quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

che è continua nel suo campo di esistenza. Quindi per quanto visto prima $f'(x)$ è continua nell'origine se e solo se

$$\lim_{x\to 0}\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}=0$$

cioè se $\alpha>2$.