

II Esonero di AM120 - 29/5/2010

Tema 1 [5 punti] Introdurre la nozione di integrale improprio e mostrare l'integrabilità di $\frac{\sin x}{x}$ in $(0, +\infty)$.

Tema 2 [5 punti] Definire il concetto di convergenza uniforme per serie di funzioni, mostrando la continuità in I della somma di una serie uniformemente convergente in I .

Tema 3 [5 punti] Definire i coefficienti di Fourier di $f \in C_{per}(\mathbb{R})$ e verificare la validità della disuguaglianza di Bessel.

Esercizio 1 [3 punti] Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx.$$

Esercizio 2 [3 punti] Determinare l'integrabilità di $\arctan x - \pi + \frac{1}{x}$ in $(1, +\infty)$.

Esercizio 3 [6 punti] Determinare l'insieme di convergenza puntuale, uniforme e totale di

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n(x^2+x+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^{2n}}.$$

Esercizio 4 [3 punti] Calcolare esplicitamente il valore della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

Esercizio 5 [3 punti] Trovare i coefficienti di Fourier dell'estensione periodica in \mathbb{R} di $e^{\alpha|x|}$, $x \in (-\pi, \pi)$, determinando così il valore della serie (giustificare accuratamente)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{\alpha\pi} - 1}{n^2 + \alpha^2}.$$