I Esonero di AM120 - 14/4/2010 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
Usando il Teorema di De l'Hopital si ha che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\ln(3x+1))}{e^x-3^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\ln(3x+1))\frac{3}{3x+1}}{e^x-3^x\ln 3}=-\frac{3}{\ln 3-1}.$$

Esercizio 2
Dalla decomposizione $\frac{1}{x^2(x+1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}$ si ottiene per il primo integrale

$$\int\frac{dx}{x^2(x+1)}=\ln|\frac{x+1}{x}|-\frac{1}{x}.$$

Dal cambio di variabile $s=\sqrt{\frac{4+e^x}{1-e^x}}$ nel secondo integrale gli estremi $-\ln 6$, $-\ln 2$ diventano $\sqrt{5}$, 3, e si ha

$$\int_{-\ln 6}^{-\ln 2}\frac{4+e^x}{1-e^x}(\sqrt{\frac{4+e^x}{1-e^x}}+2)dx=10\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{s^3ds}{(s-2)(s^2+1)}=10\int_{\sqrt{5}}^{3}[1+\frac{2s^2-s+2}{(s-2)(s^2+1)}]ds.$$

Dalla decomposizione $10\frac{2s^2-s+2}{(s-2)(s^2+1)}=\frac{16}{s-2}+2\frac{2s-1}{s^2+1}$ si ottiene infine

$$\int_{-\ln 6}^{-\ln 2}\frac{4+e^x}{1-e^x}(\sqrt{\frac{4+e^x}{1-e^x}}+2)dx=10(3-\sqrt{5})-16\ln(\sqrt{5}-2)+2\ln\frac{5}{3}-2(\arctan 3-\arctan\sqrt{5}).$$

Integrando per parti nel terzo integrale si ottiene

$$\int(x+\frac{1}{x^2})\arctan x dx=\frac{x^3-2}{2x}\arctan x-\int(\frac{x^2+1}{2}-\frac{x+2}{2x})\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{x^3-2}{2x}\arctan x-\frac{x}{2}+\int\frac{x+2}{2x(x^2+1)}dx.$$

Dalla decomposizione $\frac{x+2}{2x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{2x-1}{2(x^2+1)}$ si ottiene

$$\int(x+\frac{1}{x^2})\arctan x\,dx=\frac{x^3+x-2}{2x}\arctan x-\frac{x}{2}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

Esercizio 3
a) Poiché $g'(x)=3(x+1)(x+5)\le 0$ esattamente in $[-5,-1]$ e $\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=\pm\infty$, al crescere di x la funzione $g(x)$ parte da valori molto negativi vicino $-\infty$, cresce fino al valore di massimo locale $g(-5)$, decresce poi fino al valore di minimo locale $g(-1)=8$ ed infine ricresce verso valori molto positivi vicino a $+\infty$. Quindi la funzione taglia l'asse delle x soltanto una volta in un punto $x_0<-5$.
b) La funzione $f(x)$ ha senso per $x\neq\pm\sqrt{5}$ e si ha che

$$\lim_{x\to\sqrt{5}^\pm}f(x)=\pm\infty\,,\qquad \lim_{x\to(-\sqrt{5})^\pm}f(x)=\mp\infty.$$

Da $f'(x)=-\frac{(x+5)(x+1)}{(x^2-5)^2}$ e $f''(x)=2\frac{g(x)}{(x^2-5)^3}$ si ha che la funzione $f(x)$ cresce esattamente in $[-5,-\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5},-1]$ con la concavitá rivolta verso il basso solo in $(-\infty,x_0]$. Da tutte le informazioni trovate si puó facilmente tracciare il grafico della funzione $f(x)$.