# Appello X di AM120 - 7/9/2010 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

**Esercizio** 1
La funzione $f(x)$ è definita solo per $x > 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Dallo studio di $f'(x) = x(2\ln x - 1)$, si ottiene la crescenza di $f(x)$ in $[\sqrt{e}, +\infty)$ e quindi $x = \sqrt{e}$ è un punto di minimo assoluto con $f(\sqrt{e}) = -\frac{e}{2}$. Dalla derivata seconda $f''(x) = 2\ln x + 1$, si ottiene la convessitá di $f(x)$ in $[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$. Inoltre all'infinito la funzione esplode in quanto $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (senza peró avere un asintoto obliquo). Da tali informazioni si puó tracciare un grafico della funzione $f(x)$.

**Esercizio** 2
Dai limiti notevoli del seno e coseno otteniamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^4(\sin x^2 - \sin^2 x)}{1 - \cos x^4} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^4(\sin x^2 - \sin^2 x)}{x^8} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 - \sin^2 x}{x^4}.$$

Dallo sviluppo di Taylor di $\sin x$ otteniamo che $\sin x^2 = x^2 + O(x^6)$, $\sin^2 x = (x - \frac{x^3}{6} + O(x^5))^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^6)$, e quindi $\sin x^2 - \sin^2 x = \frac{x^4}{3} + O(x^6)$. Il valore del limite sará quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^4(\sin x^2 - \sin^2 x)}{1 - \cos x^4} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{3} + O(x^6)}{x^4} = \frac{2}{3}.$$

**Esercizio** 3
Riscriviamo integrale come

$$\int \frac{\cos x}{4\sin x - 3\cos x} dx = \int \frac{dx}{4\tan x - 3},$$

e con la sostituzione $t = \tan x$ otteniamo che

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{4\sin x - 3\cos x} dx &= \int \frac{dt}{(4t-3)(1+t^2)}\Big|_{t=\tan x} = \frac{1}{25} \int [\frac{16}{4t-3} - \frac{4t+3}{1+t^2}]dt\Big|_{t=\tan x} \\ &= \frac{2}{25} \ln \frac{(4\tan x - 3)^2}{1 + \tan^2 x} - \frac{3}{25}x = \frac{2}{25} \ln(9\cos^2 x - 12 \sin x \cos x + 16 \sin^2 x) - \frac{3}{25}x.\end{aligned}$$

**Esercizio** 4
Integrando per parti abbiamo che $\forall\, M > 2$:

$$\int_1^M \sin x \arcsin \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \sin x \arcsin \frac{1}{x} dx - \cos x \arcsin \frac{1}{x}\Big|_2^M - \int_2^M \frac{\cos x}{\sqrt{1 - x^{-2}}} \frac{dx}{x^2}.$$

Siccome $\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^{-2}}} \frac{dx}{x^2}$ è stimata in modulo in $[2, +\infty)$ da $\frac{C}{x^2}$ per $C > 0$ grande, otteniamo che $\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^{-2}}} \frac{dx}{x^2}$ è integrabile in $(2, +\infty)$. Otteniamo quindi che la funzione $\sin x \arcsin \frac{1}{x}$ è integrabile in $(1, +\infty)$ e vale

$$\int_1^\infty \sin x \arcsin \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \sin x \arcsin \frac{1}{x} dx + \cos 2 \arcsin \frac{1}{2} - \int_2^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{1 - x^{-2}}} \frac{dx}{x^2}.$$

**Esercizio** 5

a) Dallo studio della derivata prima si ottiene che la funzione $u_n(x)$ è crescente in $[-1, -\frac{n}{n+2}] \cup [0, 1]$. Notiamo che $u_n(-1) = 0$, $u_n(-\frac{n}{n+2}) = (1 + \frac{2}{n})^{-n-2} \frac{4}{n^3}$, $u_n(1 - \delta) = (1 - \delta)^n \frac{(2-\delta)^2}{n}$ e $u_n(1) = \frac{4}{n}$. Dal confronto asintotico tra questi numeri, otteniamo che per $n$ grande

$$\max_{[-1,1-\delta]} u_n = u_n(-\frac{n}{n+2}) = (1 + \frac{2}{n})^{-n-2} \frac{4}{n^3}$$

e

$$\max_{[-1,1]} u_n = u_n(1) = \frac{4}{n}.$$

b) La serie converge puntualmente ed assolutamente in $[-1, 1)$. Infatti, per il criterio della radice $n-$esima converge per $|x| < 1$. Per $x = -1$ la serie è nulla (quindi convergente) e per $x = 1$ coincide con un multiplo della serie armonica (quindi diverge). Per $|x| > 1$ il termine $n-$esimo non tende a zero per $n \to +\infty$ e quindi la serie non converge.

La serie converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[-1, 1 - \delta]$ per ogni $\delta \in (0, 1)$ poiché dal punto precedente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{[-1,1-\delta]} |\frac{x^n}{n}(x + 1)^2| = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{2}{n})^{-n-2} \frac{4}{n^3}$$

risulta essere convergente. Infatti, segue dal criterio asintotico e dal fatto che $(1 + \frac{2}{n})^{-n-2} \to e^{-2}$ per $n \to +\infty$ e la serie $\sum_{n=1} \frac{1}{n^3}$ è convergente.

Infine, la serie non puó convergere né totalmente né uniformemente in $[-1, 1)$ altrimenti si otterebbe la convergenza puntuale in $x = 1$.