Appello B di AM120 - 28/6/2010

Tema 1 [5 punti] Enunciare e dimostrare il Teorema della media integrale ed il Teorema fondamentale del calcolo.

Tema 2 [5 punti] Introducendo il concetto di derivata, dimostrare completamente la validitá del Teorema di Rolle.

Tema 3 [5 punti] Definire il concetto di convergenza uniforme e mostrare sotto quali ipotesi la somma di una serie di funzioni risulta essere derivabile.

Esercizio 1 [6 punti] a) Determinare qualitativamente l'insieme $\{g(x) \geq 0\}$, ove $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$.
b) Tracciare il grafico della funzione $f(x) = \frac{1-x}{x^2+3}$ determinando anche le regioni di convessitá.

Esercizio 2 [3 punti] Se esiste finito, calcolare il valore di

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-\cos(2x))}{\log(\tan(2x))}.$$

Esercizio 3 [3 punti] Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x} dx.$$

Esercizio 4 [3 punti] Determinare l'integrabilitá o meno di $\frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh x}$ in $(-\infty, +\infty)$.

Esercizio 5 [3 punti] Sia per $n \geq 1$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{n+1} \\ \sin^2(\frac{\pi}{x}) & \text{se } \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Determinare la convergenza puntuale di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ in $(0, 1]$, discutendo l'uniformitá di tale convergenza in $(0, 1]$ e in $[\delta, 1]$ per $\delta \in (0, 1]$.