Appello A di AM120 - 15/6/2010

Gli studenti interessati al recupero di uno dei due esoneri devono svolgere in un'ora e mezza solo la parte corrispondente, tenendo presente che i punteggi saranno poi da raddoppiare. Gli altri studenti avranno invece tre ore di tempo per svolgere il compito.

Parte I

Tema 1 [5 punti] Enunciare e dimostrare il Teorema della media integrale ed il Teorema fondamentale del calcolo.

Tema 2 [5 punti] Dimostrare la validitá del primo Teorema di de l'Hôpital.

Esercizio 1 [3 punti] Trovare, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluto di $f(x) = x \ln x + 3x$ in $(0, 5]$.

Esercizio 2 [3 punti] Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste finito

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^{x^2} - \cos x}{x^3 \sin x},$$

calcolandone il valore.

Esercizio 3 [3 punti] Tracciare il grafico della funzione $f(x) = (x^2 + 2x)e^x$ determinando anche le regioni di convessitá.

Parte II

Tema 3 [5 punti] Enunciare e dimostrare la formula di Taylor, evidenziando la differente stima del resto per funzioni derivabili $n-$volte e $(n + 1)-$volte.

Tema 4 [5 punti] Definire il concetto di convergenza uniforme e mostrare sotto quali ipotesi la somma di una serie di funzioni risulta essere derivabile.

Esercizio 4 [3 punti] Usando gli sviluppi di Taylor, determinare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x^3) - \sin^3 x}{x^3(\cos(x^3) - \cos^3 x)}.$$

Esercizio 5 [3 punti] Determinare l'insieme di convergenza puntuale, uniforme e totale in $[0, +\infty)$ di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \sqrt[n]{1 + \frac{x}{n}}.$$

Esercizio 6 [3 punti] Determinare l'integrabilitá di $\frac{x}{(x^x - 1)^2}$ in $(0, 1)$.