ST1- 1 ESONERO: 16-4-2008 *(Orlandi)*

Esercizio 1 (6 punti) Siano X e Y due variabili aleatorie con distribuzione uniforme sull'insieme dei punti con coordinate intere in $S = \{(x,y) : 0 \le x \le 7; x \le y \le x+2\}$. La funzione di densitá di probabilitá discreta congiunta é quindi $f(x,y) = \frac{1}{24}$, per $(x,y) \in S$. Trovare

(1) le densitá marginali $f_X(\cdot)$ e $f_Y(\cdot)$,
(2) la $f_{Y|X}(y|x)$, densitá discreta condizionata di Y rispetto a X,
(3) La media di Y condizionata a $X = x$, $E[Y|x]$
(4) La varianza di Y condizionata a $X = x$, $var(Y|x)$.

Soluzione La marginale $f_X(\cdot)$ é

$$f_X(x) = \sum_{y=x}^{x+2} f(x,y) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \quad \text{per} \quad x \in \{0, \dots 7\}.$$

La marginale $f_Y(\cdot)$ é

$$f_Y(y) = \sum_{x=y-2}^{y} f(x,y) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \quad \text{per} \quad x \in \{2, \dots 7\},$$

$$f_Y(0) = \frac{1}{24}, \quad f_Y(1) = \frac{1}{12}, \quad f_Y(9) = \frac{1}{24}, \qquad f_Y(1) = \frac{1}{12}.$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{3}.$$

$$E[Y|x] = \frac{1}{3}[x + (x+1) + (x+2)] = x + 1.$$

$$var(Y|x) = E[(Y|x)^2] - (E[Y|x])^2 = \frac{1}{3}[x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2] - (x+1)^2 = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 2 (10 punti) Sia $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $n \in N$, un campione casuale estratto da una distribuzione di Bernoulli, di parametro $p \in (0,1)$.

(1) Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza $T := T_n$ per p.
(2) É uno stimatore non distorto? (motivare)
(3) Determinare l' errore quadratico medio.
(4) É lo stimatore trovato T una statitistica sufficiente? (Si scriva cosa si intende per Statistica Sufficiente e si verifichi che T lo sia quando $n = 2$).
(5) Si consideri la successione degli stimatori T_n al variare della lunghezza del campione n, $\{T_n\}_n$. Si dica cosa si intende per successione di stimatori *semplicemente consistenti* e si verifichi che $\{T_n\}_n$ lo sia.
(6) Si determini lo stimatore di massima verosimiglianza V per la varianza della distribuzione di Bernouilli.
(7) É V non distorto? (motivare)
(8) Trovare il valore di c affinché cV sia uno stimatore non distorto della varianza della distribuzione di Bernouilli.

Soluzione Si trova facilmente che lo stimatore di massima verosimiglianza di p é $T := \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Poiché $E[\bar{X}] = p$, $\bar{X}$ é uno stimatore non distorto. L' errore quadratico medio é

$$E\left[(\bar{X} - p)^2\right] = var(\bar{X}) = \frac{1}{n}p(1-p).$$

Si ricorda che una Statistica T é sufficiente se e solo se la distribuzione di $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ condizionata a $\{T = t\}$, $t \in R$, é indipendente da $p \in (0,1)$. Applicando questa definizione per $n = 2$ e $T = X_1 + X_2$ si calcola

$$f_{(X_1,X_2)|T=t}(\cdot,\cdot,\cdot|t)$$

e si ottiene che é indipendente da p. La $\{T_n\}_n$ é semplicemente consistente se, per ogni $\epsilon > 0$ e $p \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[p-\epsilon < T_n < p+\epsilon\right] = 1.$$

Si ottiene immediatamente (Cheybishev) che

$$P[|T_n - p| \geq \epsilon] \leq \frac{1}{\epsilon^2} E[T_n^2] = \frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{n} p(1-p).$$

Si ottiene quindi

$$P\left[p-\epsilon < T_n < p+\epsilon\right] = 1 - P[|T_n - p| \geq \epsilon] \geq 1 - \frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{n} p(1-p).$$

Per ogni $\epsilon > 0$ fissato, per $n \to \infty$ si ottiene che $\{T_n\}_n$ é semplicemente consistente. Lo stimatore di massima verosimiglianza per la varianza $p(1-p)$ della popolazione di Bernouilli é, per il Teorema 7.2 (pag 293 libro testo)

$$V = \bar{X}(1-\bar{X}).$$

Si ha

$$E\left[\bar{X}(1-\bar{X})\right] = E\left[\bar{X} - (\bar{X})^2\right] = p - E[(\bar{X})^2].$$

$$E[(\bar{X})^2] = \frac{p}{n} + \frac{(n-1)}{n} p^2.$$

Poiché

$$E\left[V\right] = p - \frac{p}{n} - \frac{(n-1)}{n} p^2 = \frac{(n-1)}{n} p(1-p),$$

V é uno stimatore distorto. Se si sceglie $c = \frac{n}{(n-1)}$ si ha che

$$cE\left[\bar{X}(1-\bar{X})\right] = p(1-p)$$

e quindi $c[\bar{X}(1-\bar{X})]$ é uno stimatore non distorto della varianza di $\bar{X}$.

Esercizio 3 (8 punti) Sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \in N$, un campione casuale estratto da una distribuzione esponenziale con densitá di probabilitá $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ per $x \in R^+$, $\theta > 0$.

(1) Trovare lo stimatore T di massima verosimiglianza per θ.
(2) Determinare se T non é distorto.
(3) Determinare l'errore quadratico medio di T.
(4) Determinare la funzione di distribuzione di probabilitá di

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Soluzione Si calcola facilmente che lo stimatore di massima verosimiglianza per θ é

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

$$E[\bar{X}] = \theta$$

Lo stimatore $\bar{X}$ di θ non é distorto. L'errore quadratico medio é

$$E[(\bar{X}-\theta)^2] = E[(\bar{X})^2] - \theta^2.$$

$$E[(\bar{X})^2] = \frac{1}{n^2}\left[2n\theta^2 + n(n-1)\theta^2\right] = \theta^2\frac{(n^2+n)}{n^2} = \theta^2\frac{(1+n)}{n}.$$

Quindi

$$E[(\bar{X}-\theta)^2] = \frac{\theta^2}{n}.$$

Con il metodo della funzione generatrice dei momenti si ottiene che $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ha una distribuzione Gamma di parametri n e $\frac{1}{\theta}$. Per $y \geq 0$ abbiamo

$$P[Y \leq y] = \int_0^y \frac{1}{\Gamma(n)} z^{n-1} (\frac{1}{\theta})^n e^{-\frac{1}{\theta}z} dz$$

Quindi

$$P[\frac{Y}{n} \leq \frac{y}{n}] = \int_0^y \frac{1}{\Gamma(n)} z^{n-1} (\frac{1}{\theta})^n e^{-\frac{1}{\theta}z} dz$$

e c on un cambio di coordinate $u = \frac{z}{n}$, si ottiene

$$P[\bar{X} \leq x] = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(n)} (nu)^{n-1} (\frac{1}{\theta})^n e^{-\frac{n}{\theta}u} du.$$

Quindi $\bar{X}$ ha una distribuzione Gamma di parameteri n e $\frac{n}{\theta}$.

Esercizio 4 (6 punti) Sia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale estratto da una distribuzione con densitá di probabilitá $f(x,\theta) = \theta x^{(\theta-1)}$, per $x \in (0,1)$, $\theta > 0$. Determinare lo stimatore T di θ con il metodo dei momenti.

Soluzione La media della variabile X avente distribuzione $f(x,\theta)$ é

$$E[X] = \int_0^1 x\theta x^{(\theta-1)} = \frac{\theta}{\theta+1}$$

Prendiamo il primo momento del campione

$$M_n^1 = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{\theta}{\theta+1}.$$

Il primo momento corrisponde alla media di $\bar{X}$. Risolvendo per θ abbiamo

$$\theta = \frac{\bar{x}}{(1-\bar{x})}.$$

Quindi lo stimatore ottenuto con il metodo dei momenti di θ é

$$T = \frac{\bar{X}}{(1-\bar{X})}.$$