Tutorato di Statistica 1 del 22/04/2009
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1.
Vedere esercizio 3 del tutorato 4 A.A. 2007

Esercizio 2.
$f(x,\theta) = 2\theta x e^{-\theta x^2} 1_{(0,+\infty)}(x)$
Metodo dei momenti:
$E[x] = \int_0^{+\infty} 2\theta x^2 e^{-\theta x^2}$
facendo la sostituzione $\theta x^2 = y$ si trova che
$E[x] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\theta}} y^{\frac{1}{2}} e^{-y} dy = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \Gamma(3/2) = \frac{\pi}{2\sqrt{\theta}}$ quindi $\frac{\pi}{2\sqrt{\theta}} = \bar{X}$
da cui $\hat{\theta} = (\frac{\pi}{2\bar{X}})^2$
Metodo della massima verosomiglianza:
$L(\theta) = \prod_{i=1}^n 2\theta x_i e^{-\theta x_i^2} 1_{(0,+\infty)}(x_i)$
$logL(\theta) = n \cdot log(2\theta) - (\theta \sum_i^n x_i^2) + log(\prod_i^n x_i)$
$\frac{d}{d\theta} logL(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_i^n x_i^2 = 0$ Da cui $\theta = \frac{n}{\sum_i^n x_i^2}$ quindi $\hat{\theta} = 1/M_2^{'}$

Esercizio 3.
Sia $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}} 1_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$. Calcolare la funzione generatrice dei momenti, $E[x]$, $Var[x]$. Stimare θ con il metodo dei momenti e della massima verosomiglianza. $E[e^{tx}] = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\theta^2} e^{tx} e^{-x/\theta} dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x(\frac{1}{\theta}-t)} dx$
facendo la sostituzione $y = x(\frac{1}{\theta} - t)$ e osservando che $\frac{1}{\theta} > t$ si ha: $= \frac{1}{\theta^2(\frac{1}{\theta}-t)^2} \int_0^{+\infty} y e^{-y} dy = \frac{1}{\theta^2(\frac{1}{\theta}-t)^2}$
Allora $E[x] = m_x^{'}(0) = 2\theta$
$Var[x] = m_x^{''} - m_x^{'}{}^2 = 2\theta^2$
Stima di θ con il metodo dei momenti:
$\mu_1^{'} = M_i^{'}$ quindi $2\theta = \bar{X}$ da cui $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{2}$.
Stima di θ con la massima verosomiglianza:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta^2} x_i e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \left(\frac{1}{\theta^2}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta}\sum_i^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i$$

$logL(\theta) = nlog(1/\theta^2) - 1/\theta \sum_i^n x_i + log(\prod_i x_i)$
$\frac{d}{d\theta} logL(\theta) = -\frac{2n}{\theta} + \frac{\sum_i^n x_i}{\theta^2} = 0$ da cui $\theta = \frac{\sum_i^n x_i}{2n}$ quindi $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{2}$.