ST1- 2 ESONERO: 28-5-2009 *(Orlandi)*

Esercizio 1 (10 punti) Sia $(X_1, \dots, X_n)$ un campione estratto da $N(\mu, \sigma^2)$, μ nota. Si vuole verificare

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \\ H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2. \end{cases}$$

Si supponga $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$. Vedere se esiste un test piú potente di ampiezza α e eventualmente determinarlo. Si ponga $\alpha = 0,05$. Si determini in questo caso la regione critica del test. Si determini inoltre l'errore di secondo tipo β.

Soluzione Poiché μ é nota, per il Lemma di Neyman Pearson possiamo determinare il test piú potente di ampiezza α nel modo seguente.

Sia $f(x, \sigma) := \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$,

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) := \frac{\prod_{i=1}^n f(x, \sigma_1)}{\prod_{i=1}^n f(x, \sigma_2)}.$$

Sia

$$C := \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : \lambda(x_1, \dots, x_n) \le \lambda_0\}.$$

Svolgendo calcoli algebrici si riscrive

$$C := \left\{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \ge k\right\}$$

dove $k > 0$ e $k = 2\frac{\sigma_1^2\sigma_0^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}|\ln \lambda_0| + n \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$. Nell 'ipotesi che H_0 sia verificata

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{(X_i - \mu)}{\sigma_0}\right)^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2 := \Xi,$$

é una chi quadro a n gradi di libertá. Si ottiene:

$$\alpha = P[(X_1, \dots, X_n) \in C|H_0] = P\left[\Xi \ge \frac{k}{\sigma_0^2}\right].$$

Quindi $k = \chi^2_{n,1-\alpha}\sigma_0^2$. In particolare per $\alpha = 0,05$ $k = \chi^2_{n,0.95}\sigma_0^2$.

L'errore di secondi tipo si determina

$$\beta = P[(X_1, \dots, X_n) \in C^c|H_1] = P\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \le k|H_1\right] = P\left[\Xi \le \frac{k}{\sigma_1^2}\right],$$

quindi $\frac{k}{\sigma_1^2} = \chi^2_{n,\beta}$.

Esercizio 2 (14 punti) Sia $(X_1, \dots, X_n)$ un campione estratto da $N(\mu, \sigma^2)$. Si chiede

(1) Sia μ non nota. Determinare un intervallo di confidenza a 90 per cento per la varianza con code uguali.
(2) Se si vuole minimizzare la lunghezza L dell intervallo di confidenza cosa si deve fare?
(3) Si calcoli $E[\frac{L}{\sigma^2}]$.
(4) Sia μ nota. Determinare un intervallo di confidenza a 90 per cento per la varianza.

Soluzione

1) Poiché μ non é nota, prendiamo come quantitá pivotale

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}.$$

Q ha distribuzione chi quadro a $n-1$ gradi di libertá. Quindi intervallo di confidenza a $\gamma = \frac{90}{100}$ si ottiene scegliendo q_1 e q_2 in modo tale che $P[q_1 \leq Q \leq q_2] = \gamma$. Svolgendo conti algebrici si ottiene che l'intervallo di confiddenza cercato é

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{q_2}, \frac{(n-1)S^2}{q_1} \right).$$

Scegliamo q_1 e q_2 tali che

$$P[Q < q_1] = \frac{1-\gamma}{2}, \quad P[Q > q_2] = \frac{1-\gamma}{2}.$$

quindi q_1 e q_2 sono i quantili della distribuzione chi quadro a $n-1$ gradi di libertá:

$$P[Q < q_2] = 1 - \frac{1-\gamma}{2} = \frac{95}{100}$$

$$P[Q < q_1] = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{5}{100}.$$

2) Per minimizzare l 'intervallo si deve minimizzare la lunghezza

$$L = (n-1)S^2 \left[\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \right]$$

con il vincolo $\int_{q_1}^{q_2} f_Q(q) dq = \gamma$.

3) Per calcolare $E[\frac{L}{\sigma^2}]$, si osserva che

$$E[\frac{L}{\sigma^2}] = \left[\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \right] E[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}] = \left[\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \right] (n-1).$$

4) Se la media é nota allora come quantitá pivotale si puó prendere

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}.$$

La Q ha distribuzione chi quadro a n gradi di libertá. Quindi intervallo di confidenza per σ^2 con $\gamma = \frac{90}{100}$ per cento é dato da

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{q_2}, \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{q_1} \right).$$

Scegliamo q_1 e q_2 come prima tali che

$$P[Q < q_1] = \frac{5}{100}, \quad P[Q > q_2] = \frac{95}{100}$$

dove Q é chi quadro con n gradi di libertá.

Esercizio 3 Sia $(X_1, \ldots, X_n)$ un campione estratto da $\theta e^{-\theta x}$, $x \geq 0$, $\theta > 0$. Determinare un intervallo di confidenza per θ al 90 per cento. (Si suggerisce di determinare una quantitá pivotale).

Soluzione Si ricorda che

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \simeq Gamma(n, \theta).$$

Consideriamo $2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \simeq Gamma(n, \frac{1}{2})$, quindi é una quantitá pivotale. Ricordiamo che una $Gamma(n, \frac{1}{2})$ e' uguale a una chiquadro con $2n$ gradi di libertá. Quindi

$$P(q_1 < Q < q_2) = \frac{90}{100}$$

e scegliamo $P[Q < q_1] = 0.05$, $P[Q > q_2] = 0.05$, con q_1 e q_2 quantili della distribuzione chiquadrato a $2n$ gradi di libertá. Inoltre abbiamo

$$P[q_1 < Q < q_2] = P[\frac{q_1}{2\sum_{i=1}^{n} X_i} \leq \theta < \frac{q_2}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}].$$