Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

GE4 - Geometria differenziale 1

Esercizi - Alvin (28-11-2008)

<u>Esercizio 1.</u> Dimostrare che sono ben definiti la traccia e il determinante di un endomorfismo lineare.

<u>Esercizio 2.</u> Calcolare l'operatore forma e discutere la natura dei punti delle seguenti superfici regolari.
(2.1) La sfera $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
(2.2) L'iperboloide a una falda $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ detto anche iperboliode iperbolico, perché?
(2.3) Il paraboloide di rotazione $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$ detto anche paraboloide ellittico, perché?
(2.4) La sella $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$ detto anche paraboloide iperbolico, perché?
(2.5) L'iperboloide a due falde $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$ detto anche iperboloide ellittico, perché?
(2.6) Il toro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 = 1\}$ (detto anche superficie di Pontecorvo, perché?)
(2.7) Mostrare inoltre che tutti i punti delle *quadriche* (2.1)-(2.5) sono dello stesso tipo mentre la curvatura di Gauss del toro assume tutti i segni possibili.

<u>Esercizio 3.</u> Nel semipiano $\{(0, y, z) : y > 0\}$ sia data la curva regolare

$$\gamma(v) = (y(v), v)$$

Utilizzando le formule a pagina 161 (esempio 4) del Do Carmo, discutere il segno della curvatura di Gauss della superficie Σ ottenuta facendo ruotare la curva γ intorno all'asse z. Dare un'interpretazione geometrica del segno della curvatura di Gauss in relazione con la derivata seconda di $y(v)$.

<u>Esercizio 4.</u> Sia Σ una superficie in $\mathbb{R}^3$ e sia $v \in S^1 \subset T_p\Sigma$ un vettore unitario i.e. $v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$, dove $e_1, e_2 \in T_p\Sigma$ sono le direzioni principali nel punto p. Calcolare gli zeri della seconda forma quadratica:

$$\begin{aligned} f :& [0, \pi) \longrightarrow [-k_2, -k_1] \\ & \theta \longmapsto -k_1 \cos^2\theta - k_2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

che da la curvatura normale per ogni vettore $v \in T_p\Sigma$. Gli zeri di f sono detti *direzioni asintotiche*. Dimostrare inoltre che si hanno:
(4.1) Zero direzioni asintotiche se e solo se il punto p è ellittico.
(4.2) Una direzione asintotica se e solo se il punto è parabolico
(4.3) Due direzioni asintotiche se e solo se il punto è iperbolico
(4.4) Tre direzioni asintotiche se e solo se infinite direzioni asintotiche se e solo se il punto è planare

<u>Esercizio 5.</u> Determinare i punti critici della funzione "altezza dal piano orizzontale $\{z = 0\}$" sulle seguenti superfici e discuterne la natura
(2.1) La "Sella di scimmia" data dalla carta locale

$$\begin{aligned} \mathbf{x} :& \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (u, v) \longmapsto (u, v, u^3 - 3v^2u) \end{aligned}$$

(5.2) La "Sella" data dalla carta locale

$$\begin{aligned} \mathbf{x} :& \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) \longmapsto (u, v, uv) \end{aligned}$$

(5.3) La superficie Σ data dalla carta locale

$$\begin{aligned} \mathbf{x} :\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto (u, v, v^4 - v^2(e^{2u} + e^{-2u})) \end{aligned}$$

(5.4) La superficie Σ data dalla carta locale

$$\begin{aligned} \mathbf{x} :\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto (u, v, v^4 - 4v^2 + 4u^2 - u^4) \end{aligned}$$

(5.5) Il toro $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^2 = 1,\ z \geq 0\}$

<u>Esercizio 6.</u> Non esistono superfici Minime compatte in $\mathbb{R}^3$. Dimostrare o trovare un controesempio.

<u>Esercizio 7.</u> Abbiamo visto che se $p \in \Sigma$ è un massimo relativo della funzione $\delta = \|\cdot\|^2$ allora p è ellittico. Considerare la funzione δ sull'iperboloide a una falda

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0\}.$$

δ ammette un massimo assoluto? δ ammette un massimo relativo? δ ammette un minimo assoluto?

<u>Esercizio 8.</u> Mostrare con degli esempi che in generale in un punto di minimo per $\delta = \|\cdot\|^2 : \Sigma \to \mathbb{R}$ la curvatura di Gauss può avere segno positivo, negativo o nullo.

<u>Esercizio 9.</u> Mostrare che il catenoide $X_1(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$ e l'elicoide $X_2(u,v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ sono superfici Minime, la prima è di rotazione e la seconda è rigata. Notare che l'Elicoide NON è una superficie di rotazione. Come sono fatte le curve d'intersezione con i piani orizzontali?

<u>Esercizio 10.</u> Verificare che l'iperboloide a una falda $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ è una superficie rigata nella seguente maniera: considerare le seguenti coordinate locali su Σ:

$$\begin{aligned} \phi :(-\pi,\pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \Sigma \\ (u,v) &\longmapsto (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v) \end{aligned}$$

Sia $\gamma(u) = \phi(u,0) = (\cos u, \sin u, 0)$ il cerchio unitario, per ogni $u = u_0$ fisato e al variare di $v \in \mathbb{R}$ la curva $\phi(u_0, v) \subset \Sigma$ è la retta che passa per il punto $\gamma(u_0) \in \mathbb{R}^3$ nella direzione del vettore $\dot{\gamma}(u_0) + \vec{k}$ è quindi tutta contenuta in Σ. Mostrare che inoltre Σ è doppiamente rigata perché contiene anche tutte le rette per $\gamma(u_0)$ nella direzione di $-\dot{\gamma}(u_0) + \vec{k}$. Infine usare questa proprietà geometrica per dimostrare che Σ ha Curvatura di Gauss strettamente negativa.

<u>Esercizio 11.</u> Dimostrare che se Σ è una superficie rigata allora non ha punti ellittici.