Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM3 soluzioni tutorato 5

A.A 2008-2009

Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: G.Mancini, E. Padulano

Tutorato 5 del 25 Marzo 2009

Esercizio 1 $f(x,y) = x^2 - x + 2y^2 + 1 \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$

Sia $g(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$.

Dobbiamo cercare il massimo e il minimo di f su $A = \{g = 0\}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y$

$\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{x}{2} \qquad \dfrac{\partial g}{\partial y} = 2y$

Per il principio dei moltiplicatori di Lagrange i punti di massimo e minimo di f su A sono soluzioni del sistema di equazioni: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$

Dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x - 1 = \lambda \frac{x}{2} \\ 4y = 2\lambda y \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava che $y = 0 \ \vee \lambda = 2$. Se $y = 0$ allora dall'equazione del vincolo ricaviamo che $x = \pm 2$.

Se $\lambda = 2$ allora sostituendo nella prima equazione otteniamo $2x - 1 = x \Longrightarrow x = 1$ e dall' ultima equazione $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi le soluzioni del sistema sono $(\pm 2, 0)$ e $(1, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Per capire quali di questi punti sono punti di massimo e quali di minimo e sufficiente calcolare i valori che f assume in questi punti.

$f(2,0) = 3$, $f(-2,0) = 7$, $f(1, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5}{2}$

Quindi il massimo di f è 7 ed è assunto nel punto $(-2,0)$ mentre il minimo è $\frac{5}{2}$ ed è assunto in $(1, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Esercizio 2 Sia $f(x,y) = y^4 - 2x^2y^3 \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1 - x^2\}$

I punti di massimo e minimo di f su B o sono interni a B (e quindi sono punti stazionari di f) oppure si trovano sul bordo di B.

Cerchiamo prima i punti di massimo e minimo interni a B.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -4xy^3 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 6x^2y^2$

$$\begin{cases} -4xy^3 = 0 \\ 4y^3 - 6x^2y^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 0$$

quindi tutti i punti della forma $(x,0)$ con $x \in (-1,1)$ sono punti stazionari di f e quindi possibili punti di massimo/minimo nell' interno di B.

Cerchiamo ora i punti critici sul bordo di B.

$\partial B = B_1 \cup B_2$ dove

$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 - x^2, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$

$B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -1, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$

Sia $g(x,y) = y + x^2 - 1$; i punti critici di f su B_1 sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} -4xy^3 = 2\lambda x \\ 4y^3 - 6x^2y^2 = \lambda \\ y = 1 - x^2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo che $x = 0$ o $\lambda = -2y^3$.
Se $x = 0$ allora dall' ultima equazione si ottiene $y = 1$.
Se $\lambda = -2y^3$ allora la seconda equazione diventa $6y^3 - 6x^2y^2 = 0$ da cui o $y = 0$ oppure $y = x^2$. Se $y = 0$ allora $x = \pm 1$. Se $y = x^2$ allora l'ultima equazione diventa $2x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y = \frac{1}{2}$.
Quindi le soluzioni del sistema sono $(0,1), (\pm 1, 0)$ e $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$.
Studiamo ora f su B_2.
$F|_{B_2}(x,y) = 1 + 2x^2$ ha un minimo in $(0,-1)$ e due massimi per $x = \pm\sqrt{2}$.
Altri possibili punti di massimo sono i punti di intersezione di B_1 e B_2 cioè i punti $(-\sqrt{2}, -1)$ e $(\sqrt{2}, -1)$.
Riassumendo i possibili punti di massimo e di minimo in B della funzione f sono $(0,1), (\pm 1, 0), (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$,$(0,-1)$, $(\pm\sqrt{2}, -1)$ e i punti del tipo $(x, 0)$ con $-1 \le x \le 1$.
$f(0, \pm 1) = 1$, $f(\pm 1, 0) = 0$, $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{16}$, $f(\pm\sqrt{2}, -1) = 5$, $f(x, 0) = 0$.
Quindi il massimo di f è 5 e il minimo è $-\frac{1}{16}$.

Esercizio 3 $f(x,y,z) = e^{x^2+y-yz}$
Sia $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Dobbiamo cercare il massimo e il minimo di f sull'insieme $\{g = 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y-yz} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (1-z)e^{x^2+y-yz} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -ye^{x^2+y-yz}$$

I punti critici di f sulla sfera sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2xe^{x^2+y-yz} = 2\lambda x \\ (1-z)e^{x^2+y-yz} = 2\lambda y \\ -ye^{x^2+y-yz} = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

-Se $x = 0$ il sistema diventa $\begin{cases} (1-z)e^{y-yz} = 2\lambda y \\ -ye^{y-yz} = 2\lambda z \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$. se $y = 0$ dal sistema si ricava $z = \pm 1$ mentre se $z = 0$ dalla seconda equazione ricaviamo che $y = 0$ che però non è accettabile perchè non soddisfa l'ultima equazione. Se $y, z \neq 0$ allora dalle prime due equazioni ricaviamo che $2\lambda e^{-y+yz} = \frac{1-z}{y} = -\frac{y}{z} \Longrightarrow y^2 = z^2 - z$; sostituendo nella terza equazione otteniamo che $2z^2 - z - 1 = 0 \Longrightarrow z = -\frac{1}{2}, 1$. Se $z = 1$ otteniamo $y = 0$ mentre se $z = -\frac{1}{2}$ otteniamo che $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
-Se $x \neq 0$ allora dividendo per $2x$ la prima equazione del sistema di partenza si ottiene che $\begin{cases} e^{x^2+y-yz} = \lambda \\ (1-z)e^{x^2+y-yz} = 2\lambda y \\ -ye^{x^2+y-yz} = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e^{x^2+y-yz} = \lambda \\ (1-z) = 2y \\ -y = 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow 1 - z = -4z \Longrightarrow$ $z = -\dfrac{1}{3} \Longrightarrow y = \dfrac{2}{3}, x = \pm\dfrac{2}{3}$. Quindi i possibili punti di massimo/minimo di f sono $(0,0,\pm 1)$, $(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ e $(\pm\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.
$f(0,0,\pm 1) = 1$, $f(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = e^{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$, $f(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = e^{-\frac{3\sqrt{3}}{4}}$, $f(\pm\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) = e^{\frac{4}{3}}$.
Quindi il massimo di f è $e^{\frac{4}{3}}$ mentre il minimo è $e^{-\frac{3\sqrt{3}}{4}}$.

Esercizio 4 $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \le 1 - x^2 - y^2,\ z \ge 0\}$ $\quad f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 - x^2z + y^4$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(1-z) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(2y^2-1) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - x^2$$

Cerchiamo per prima cosa i punti critici di f interni ad A.

Questi punti devono essere soluzioni del sistema $\begin{cases} 2x(1-z) = 0 \\ 2y(2y^2-1) = 0 \\ 2z - x^2 = 0 \end{cases}$ che però non ha soluzioni interne ad A (le uniche soluzioni del sistema o non stanno in A oppure si trovano sul bordo di A)

Cerchiamo allora i possibili critici di f su ∂A. $\partial A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ dove

$A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - x^2 - y^2,\ z > 0\}$

$A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0,\ x^2 + y^2 < 1\}$

$A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$

I punti critici di f in A_1 sono soluzioni del sistema $\begin{cases} 2x(1-z) = 2\lambda x \\ 2y(2y^2-1) = 2\lambda y \\ 2z - x^2 = \lambda \\ x^2 + y^2 + z - 1 = 0 \end{cases}$. Distinguiamo due casi:

-Se $x = 0$ allora il sistema diventa $\begin{cases} 2y(2y^2-1) = 2\lambda y \\ 2z = \lambda \\ y^2 + z - 1 = 0 \end{cases}$. Dalla seconda equazione si ottiene che $y = 0$ o $\lambda = 2y^2 - 1$. Se $y = 0$ allora $z = 1$. Se invece $\lambda = 2y^2 - 1$ allora si ha $2z = 2y^2 - 1$ e quindi dalla terza equazione ricaviamo che $z = \frac{1}{4} \Longrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

-Se $x \neq 0$ allora dividendo per x la prima equazione abbiamo $\begin{cases} (1-z) = \lambda \\ 2y(2y^2-1) = 2\lambda y \\ 2z - x^2 = \lambda \\ x^2 + y^2 + z - 1 = 0 \end{cases}$.

Dalla seconda equazione otteniamo che o $y = 0$ oppure $2y^2 - 1 = \lambda$. Se $y = 0$ il sistema diventa $\begin{cases} (1-z) = \lambda \\ 2z - x^2 = \lambda \\ x^2 + z - 1 = 0 \end{cases}$ da cui $1 - z = 2z - x^2 \Longrightarrow x^2 = 3z - 1$. Sostituendo nell'ultima equazione otteniamo che $z = \frac{1}{2}$ e quindi $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Se $\lambda = 2y^2 - 1$ allora abbiamo che $\begin{cases} 1 - z = 2y^2 - 1 \\ 2z - x^2 = 2y^2 - 1 \\ x^2 + y^2 + z - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - \frac{z}{2} \\ x^2 = 3z - 1 \\ x^2 + y^2 + z - 1 = 0 \end{cases}$ sostituendo le prime due relazioni nella terza otteniamo che $3z - 1 + 1 - \frac{z}{2} + z - 1 = 0 \Longrightarrow \frac{7}{2}z = 1 \Longrightarrow z = \frac{2}{7}$ da cui $x^2 = -\frac{1}{7}$ che non è possibile. Quindi le soluzioni del sistema sono $(0, 0, 1)$,$(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4})$ e $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2})$.

Cerchiamo ora i punti critici in $A_2 \cup A_3$. Per far questo osserviamo che $f(x, y, 0) = x^2 - y^2 + y^4 = h(x, y)$. Quindi per trovare i massimi/minimi di f su $A_2 \cup A_3$ dobbiamo trovare i punti di massimo e minimo di h sul disco $x^2 + y^2 \leq 1$. I punti critici di f su A_2 sono i punti stazionari di h nel disco aperto $x^2 + y^2 < 1$

$\dfrac{\partial h}{\partial x} = 2x \qquad \dfrac{\partial h}{\partial y} = -2y + 4y^3 = 2y(2y^2 - 1)$

quindi i punti stazionari di h all'interno del disco sono $(0, 0)$ e $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Infine i punti critici di h su $x^2 + y^2 = 1$ (che corrispondono ai possibili punti di massimo/minimo di f su A_3) sono soluzioni di $\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 2y(2y^2-1) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

-Se $x = 0$ allora $y = \pm 1$

-Se $x \neq 0$ allora $\lambda = 1$ quindi $\begin{cases} 1 = \lambda \\ 2y(2y^2-1) = 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow y = 0$ o $y = \pm 1$. Se $y = 0$ allora $x = \pm 1$ mentre se $y = \pm 1$ allora $x = 0$ che però in questo caso non è possibile.

Quindi i punti stazionari di f su $A_2 \cup A_3$ sono $(0,0,0)$, $(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $(0,\pm 1,0)$ e $(\pm 1,0,0)$.
$f(0,0,0) = 0$, $f(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0) = -\frac{1}{4}$, $f(0,\pm 1,0) = 0$, $f(\pm 1,0,0) = 1$, $f(0,0,1) = 1$, $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(0,\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4}) = -\frac{1}{8}$.
Quindi il massimo di f è 1 mentre il minimo è $-\frac{1}{4}$

Esercizio 5 Sia $C = \{(x,y) \mid x^4 - x^2 + y^2 = 0\}$

(a) Sicuramente C è chiuso perchè è l'insieme degli zeri di una funzione continua. Inoltre se $(x,y) \in C$ allora $x^2 - x^4 = y^2 \geq 0 \Longrightarrow x^4 \leq x^2 \Longrightarrow x^2 \leq 1 \Longrightarrow |x| \leq 1$ e di conseguenza $y^2 = x^2 - x^4 \leq 1 - x^4 \leq 1 \Longrightarrow |y| \leq 1$.
Dunque $C \subseteq [-1,1] \times [-1,1]$ cioè C è limitato.
Quindi C è compatto perchè è chiuso e limitato.

(b) Per trovare i punti di C che distano meno dalla retta $y = -2$ dobbiamo trovare i punti di minimo della funzione $f(x,y) = (y+2)^2$ su C.
$C = \{g = 0\}$ dove $g(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$.
$\nabla g(x,y) = (4x^3 - 2x, 2y)$
Per il principio dei moltiplicatori di Lagrange i punti di minimo di f su C in cui $\nabla g \neq (0,0)$ devono essere soluzioni del sistema
$$\begin{cases} 0 = \lambda(4x^3 - 2x) \\ 2(y+2) = 2\lambda y \\ x^4 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$
Dalla prima equazione si ricava che $\lambda = 0$ oppure $4x^3 - 2x = 0$. Se $\lambda = 0$ allora abbiamo che $y = -2$ e quindi sostituendo nell' ultima equazione che $x^4 - x^2 + {}+4 = 0$ che però non ha soluzioni reali. Se $4x^3 - 2x = 0$ allora abbiamo $x = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Sostituendo nell'ultima equazione troviamo i punti $(0,0), (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2})$.
Il punto $(0,0)$ non è una soluzione del sistema perchè non soddisfa la seconda equazione quindi le soluzioni del sistema sono $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2})$.
Oltre a questi punti dobbiamo considerare i punti di C in cui $\nabla g = (0,0)$. L'unico punto di C in cui $\nabla g = (0,0)$ è $(0,0)$.
Quindi i possibili punti di minimo di f su C sono $(0,0)$ e $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2})$.
$f(0,0) = 4$, $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} + 2)^2 = \frac{25}{4}$ e $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2} + 2)^2 = \frac{9}{4}$ quindi i punti di C che distano meno dalla retta $y = -2$ sono $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$.

Esercizio 6 $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ z > 0\}$ $\qquad f(x,y,z) = z^2 + 2xz - xy^2$

(a) f non è superiormente limitata su $\mathcal{C}$ perchè $(1,0,n) \in \mathcal{C}\ \forall n \in \mathbb{N}$ e $f(1,0,n) = n^2 + 2n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Invece f è inferiormente limitata perchè $f(x,y,z) = z^2 + 2xz - xy^2 \geq z^2 - 2z - xy^2 = (z-1)^2 - 1 - xy^2 \geq (z-1)^2 - 2 \geq -2$.

(b) Siccome f non è superiormente limitata allora $\sup\limits_{\mathcal{C}} f = +\infty$.
Notiamo che se $(x_n, y_n, z_n) \in \mathcal{C}$ e $|(x_n, y_n, z_n)| \longrightarrow \infty$ allora $f(x_n, y_n, z_n) \longrightarrow +\infty$. Questo ci dice che $\inf\limits_{\mathcal{C}} f$ o è assunto in un punto di $\mathcal{C}$ oppure si ottene avvicinandosi ad un punto del piano $\{z = 0\}$. Cerchiamo i punti critici di f su C. Questi punti sono soluzioni del sistema $\begin{cases} 2z - y^2 = 2\lambda x \\ -2xy = 2\lambda y \\ 2z + 2x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

dalla terza equazione ricaviamo che $z = -x$ quindi $\begin{cases} -2x - y^2 = 2\lambda x \\ -2xy = 2\lambda y \\ z = -x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$. Dalla seconda equazione si ricava che $y = 0$ o $\lambda = -x$. Se $y = 0$ allora $x = \pm 1$ e $z = -x = \mp 1$ (il caso $x = 1$ e $z = -1$ non è ammissibile perchè in $\mathcal{C}$ ci sono solo punti con $z > 0$). Se $\lambda = -x$ allora dalla prima equazione abbiamo che $y^2 = 2x^2 - 2x$ e quindi sostituendo nell' ultima equazione otteniamo $3x^2 - 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$ o $x = -\frac{1}{3}$. Come prima il caso $x = 1$ non è accettabile perchè corrisponde ad un valore negativo di z. Se $x = -\frac{1}{3}$ allora $z = \frac{1}{3}$ e $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$.
Quindi gli unici punti critici di f su $\mathcal{C}$ sono $(-1, 0, 1)$ e $(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$.
Vediamo ora come si comporta f quando ci avviciniamo al piano $z = 0$.
f può essere prolungata con continuità al piano $z = 0$ ponendo $f(x, y, 0) = -xy^2 = g(x, y)$. Studiamo dunque i punti critici di questa funzione sul cerchio $x^2 + y^2 = 1$.
$\begin{cases} -y^2 = 2\lambda x \\ -2xy = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$. Dalla seconda equazione si ricava che $y = 0$ oppure $\lambda = -x$.
Se $y = 0$ allora $x = \pm 1$ mentre se $\lambda = -x$ allora $y^2 = 2x^2$ e quindi sostituendo nella terza equazione si ricava $3x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.
$f(-1, 0, 1) = -1$, $f(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$, $f(\pm 1, 0, 0) = 0$, $f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 0) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 0) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.
Quindi $\inf\limits_{\mathcal{C}} f = -1$ ed è in effetti un minimo perchè è assunto nel punto $(1, 0, -1)$

Esercizio 7 $F(x, y, z) = \begin{cases} x + y + z & \text{se } z > 0 \\ e^{x^2 + y - yz} & \text{se } z \le 0 \end{cases}$ su $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.
Siano $f_1(x, y, z) = x + y + z$ e $f_2(x, y, z) = e^{x^2 + y - yz}$ e siano
$B_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z > 0\}$
$B_2 = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 1 z \le 0\}$
f_1 è continua sul compatto $\overline{B_1}$ e f_2 è continua sul compatto B_2. In paricolare la funzione F è una funzione linitata sulla palla $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$. Cerchiamo il massimo e il minimo su $\overline{B}_1$ della funzione f_1. $\nabla f_1 = (1, 1, 1)$ quindi non ci sono punti critici di f_1 nell'interno di B_1. I punti critici di f_1 sul bordo di B_1 o si trovano nel disco unitario del pino $\{z = 0\}$ oppure sulla porzione di bordo della palla unitaria contenuta nel semispazio $z > 0$.
Sul piano $z = 0$ $f_1(x, y, 0) = x + y$ quindi i punti critici sul cerchio unitario sono soluzioni di $\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ che ha come uniche soluzioni i punti $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. I punti critici di f_1 sul bordo della palla sono invece soluzioni del sistema $\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ che ha come unica soluzione nella regione che ci interessa il punto $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Quindi i possibili punti di massimmo/minimo di f_1 in $\overline{B_1}$ sono i punti $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.
$f_1(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}$, $f_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \sqrt{2}$ e $f_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\sqrt{2}$.
Quindi il massimo di f_1 su B_1 è $\sqrt{3}$ ed è assunto in $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ mentre il minimo

è $-\sqrt{2}$ ed è assunto in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
Calcoliamo ora il massimo e il minimo di f_2 su B_2.
$\nabla f_2 = (2xe^{x^2+y-yz}, (1-z)e^{x^2+y-yz}, -ye^{x^2+y-yz})$ che non si annulla mai nell'interno di B_2 quindi gli unici punti critici di f_2 si trovano sul bordo di B_2. Questi punti o si trovano nel disco unitario del piano $\{z = 0\}$ oppure sulla porzione della sfera unitaria contenuta nel semispazio $\{z < 0\}$. Sul piano $z = 0$ $f_2(x, y, 0) = e^{x^2+y}$. Questa funzione non ha nessun punto critico all'interno del disco $x^2+y^2 \le 1$ mentre sul bordo del disco abbiamo $\begin{cases} 2xe^{x^2+y} = 2\lambda x \\ e^{x^2+y} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$. Dalla prima equazione abbiamo $x = 0$ o $\lambda = e^{x^2+y}$. Se $x = 0$ allora $y = \pm 1$ mentre se $\lambda = e^{x^2+y}$ abbiamo $y = \frac{1}{2}$ e $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi le soluzioni del sistema son $(0, \pm 1)$ e $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. I punti critici sulla porzione di sfera unitaria si trovano risolvendo lo stesso sistema dell'esercizio 3 e quindi sono $(0, 0, -1)$, $(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\pm\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.
I possibili punti di massimo o minimo di f_2 sono dunque $(0, 0, -1)$, $(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\pm\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $(0, \pm 1, 0)$ e $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
$f_2(0, 0, -1) = 1$, $f_2(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = e^{\frac{3}{4}\sqrt{3}}$, $f_2(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = e^{-\frac{3}{4}\sqrt{3}}$, $f_2(\pm\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) = e^{\frac{4}{3}}$, $f_2(0, \pm 1, 0) = e^{\pm 1}$ e $f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0) = e^{\frac{5}{4}}$. Quindi il massimo di f_2 su $\overline{B_2}$ è $e^{\frac{4}{3}}$ ed è assunto su $(\pm\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ mentre il minimo è $e^{-\frac{3\sqrt{3}}{4}}$ ed è assunto in $(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.
I conti che abbiamo fatto ci dicono che $F(x, y, z) \le e^{\frac{4}{3}}$ in B e quindi siccome $F(\pm\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) = e^{\frac{4}{3}}$ abbiamo che $e^{\frac{4}{3}}$ è il massimo di F.
Invece $F \ge -\sqrt{2}$ e $F(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n}, -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = -\sqrt{2} + \frac{3}{n} \longrightarrow -\sqrt{2}$ con $(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n}, -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in B \ \forall\, n \ge 3$ quindi $\inf_B F = -\sqrt{2}$ e non è un minimo perchè non ci sono punti di B in cui F vale $-\sqrt{2}$.