Esecitazione AM3 n.3-A.A. 2008-2009- 16/03/09

Esercitatore: Maristella Petralla

Teorema della funzione implicita

1. Sai $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$F(x, y, z) = \cos\, x\, \cos\, y\, e^z - \cos(z^2).$$

   (a) Rappresentare come grafico di un'opportuna funzione g linsieme $\{ F = 0 \}$ localmente in $p_0 = (0, 0, 0)$, fornendo un esempio esplicito di intorno di p_0 per cui tale rappresentazione valga.

   (b) Trovare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g rispetto allorigine.

2. Sia $x_n \in l^2$, $n \geq 1$, definita nel seguente modo:

$$x^{(k)_n} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{(n+1)^{\frac{k+1}{2}}}.$$

   (a) Calcolare $\|x_n\|^2_{l^2}$.

   (b) Discutere la convergenza eventuale in l^1 e/o in l^2 della successione x_n per $n \to +\infty$.

Soluzioni

1. (a) Sia $p = (0, 0, 0)$. Calcoliamo prima di tutto

$$\nabla F(x, y, z) =$$

$$(-\sin\, x\, \cos\, y\, e^z, -\cos\, x\, \sin\, y\, e^z, \cos\, x\, \cos\, y\, e^z + 2z\, \cos(z^2)).$$

Allora $F(p) = (0, 0)$ e $\nabla F(p) = (0, 0, 1)$. Essendo $\partial_z F(p) = 1$ invertibile con inversa $T = 1$, possiamo applicare il Teorema della Funzione Implicita e trovare una mappa $g(x, y) : B_r(0, 0) \to B_\rho(0)$, per $r, \rho > 0$ piccoli, che descrive localmente in p linsieme $\{ F = 0 \}$ come il grafico $\{ (x, y, g(x)) : (x, y) \in B_r(0, 0) \}$. Per trovare esplicitamente $r, \rho \in (0, 1)$, osserviamo che:

$$\sup_{|(x,y)|<r} |F(x, y, 0)| = \sup_{|(x,y)|<r} |\cos x \cos\, y - 1| \leq$$

$$\sup_{|(x,y)|<r} (|\cos x||\cos y - 1| + |cosx - 1|) \leq 2r \leq \rho$$

non appena $r \leq \frac{\rho}{2}$, dove $|1-\cos s| = |\sin \xi||s| \leq |s|$ per il Teorema di Lagrange. Abbaimo inoltre che per $\rho \leq \frac{1}{12}$:

$$\begin{aligned}
& \sup_{|(x,y)|<r,|z|<\rho} |1 - \partial_z F(x,y,z)| \\
= & \sup_{|(x,y)|<r,|z|<\rho} |1 - \cos\, x\, \cos\, y\, e^z - 2z\, \cos(z^2)| \\
\leq & \; 2\rho + \sup_{|(x,y)|<r,|z|<\rho} |1 - \cos\, x \cos\, y\, e^z| \\
\leq & \; 2\rho + \sup_{|(x,y)|<r,|z|<\rho} (|1 - \cos\, x\, \cos\, y| + |\cos\, x \cos\, y\, (e^z - 1)|) \leq 6\rho \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

in vista delle precedente stima e di $|e^s - 1| = e^\xi |s| \leq e|s| \leq 3|s|$ dal Teorema di Lagrange. Basta quindi scegliere $\rho = \frac{1}{12}$ e di conseguenza $r = \frac{\rho}{2} = \frac{1}{24}$.

(b) Abbiamo $g(0,0) = 0$ e $g(x,y)$ soddisfa:

$$0 = \cos\, x \cos\, y\, e^{g(x,y)} - \cos(g^2(x,y)), \quad \forall (x,y) \in B_r(0,0).$$

Derivando in x tale relazione otteniamo:

$$0 = -\sin\, x \cos\, y\, e^{g(x,y)} + \cos\, x \cos\, y\, e^{g(x,y)}\, \partial_x g(x,y)$$

$$+2\, g(x,y) \partial_x g(x,y) \sin\, g^2(x,y)$$

$\forall (x,y) \in B_r(0,0)$. Quindi $\partial_x g(0,0) = 0$ e, per simmetria di x e y, $\partial_y g(0,0) = 0$. Derivando ulteriormente in x e y in $(0,0)$ otteniamo:

$$0 = -\cos\, x \cos\, y\, e^{g(x,y)} + \cos\, x \cos\, y\, e^{g(x,y)} \partial_{xx} g(x,y)_{|x=y=0} = -1$$

$$+\partial_{xx} g(0,0)$$

$$0 = \cos\, x \cos\, y\, e^{g(x,y)} \partial_{xy} g(x,y)_{|x=y=0} = \partial_{xy} g(0,0).$$

Per simmetria di x e y, abbiamo che $\partial_{xx} g(0,0) = \partial_{yy} g(0,0) = 1$, $\partial_{xy} g(0,0) = 0$. Quindi lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di $g(x,y)$ in $(0,0)$ viene:

$$g(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + O(|(x,y)|^3).$$

2. (a) Abbiamo che:

$$\|x_n\|_{l^2}^2 = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k+1}\Big(\frac{1}{n+1}\Big)^{k+1} = \ln(1+\frac{1}{n}),$$

dove abbiamo usato lo sviluppo $\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 0} \frac{x^{k+1}}{k+1}$ per $0 < x = \frac{1}{n+1} < 1$.

(b) Dal primo punto $\|x_n\|_{l^2} \to 0$ per $n \to +\infty$. Quindi $x_n \to 0$ in l^2. Inoltre,

$$\|x_n\|_{l^1} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k\geq 0} \Big(\frac{1}{\sqrt{(n+1)}}\Big)^k = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \to 0$$

per $n \to +\infty$. Abbiamo mostrato che $x_n \to 0$ se $n \to +\infty$ anche in l^1.