Esecitazione AM3 n.2-A.A. 2008-2009- 09/03/09

Esercitatore: Maristella Petralla

Teorema della funzione implicita

1. Sia
$$F : (y, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to F(y, x) \in \mathbb{R}^2$$
definita da
$$F(y,x) = \begin{cases} F_1(y_1, y_2, x) = \sin x + e^x y_1 + \sin(y_1 y_2) \\ F_2(y_1, y_2, x) = 3|x| + y_2 + y_1^4 \end{cases} \tag{1}$$
e sia $(y_{01}, y_{02}, x_0) = (0, 0, 0)$. Dimostrare che vale il teorema delle funzioni implicite in $(0, 0, 0)$ e trovare ρ ed r che soddisfano le stime presenti nell'enunciato del teorema.

Soluzioni

1. Si ha che $F(0, 0, 0) = 0$ inoltre
$$\det \nabla_y F_{|(0,0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}_{(0,0,0)} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^x + x\cos(y_1\, y_2)\, y_2 & x\cos(y_1\, y_2)\, y_1 \\ 4\, y_1^3 & 1 \end{pmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$
Quindi vale il teorema delle funzioni implicite. Ora studiamone l'aspetto quantitativo. La prima stima da verificare è
$$\sup_{|x| \le r} |F(y0, x)| \le \frac{\rho}{2}$$
e nel nostro caso abbiamo
$$\sup_{|x| \le r} |(\sin\, x, 3|x|)| \le 4r \le \frac{\rho}{2}$$
da cui ottengo una prima stima su r $r \le \frac{\rho}{8}$.

La seconda stima da verificare è

$$\sup_{|x|\le r, |y|\le\rho} \|I - \nabla_y F\| = \sup_{|x|\le r, |y|\le\rho} \left\| \begin{pmatrix} e^x + x\cos(y_1\, y_2)\, y_2 & x\cos(y_1\, y_2)\, y_1 \\ 4\, y_1^3 & 1 \end{pmatrix} \right\|$$

Osserviamo che, data una matrice A di ordine $m \times n$, vale che $\|A\|_{op} \le \sqrt{n\, m}\|A\|_\infty$, quindi in questo caso devo verificare che valga

$$\sup_{|x|\le r, |y|\le\rho} \|I - \nabla_y F\| \le \frac{1}{4}.$$

Imponiamo che la stima valga su tutti gli elementi della matrice:

$$|-4y_1^3| \le 4\rho^3 \le \frac{1}{4}$$

$$|-x\cos(y_1\, y_2)\, y_1| \le r\rho \le \frac{\rho^2}{8} \le \frac{1}{4}$$

$$|1 - e^x - x\, \cos(y_1\, y_2)\, y_2| \le e^r - 1 + r\rho \le 3\, r + \frac{\rho^2}{8} \le \frac{3}{8}\rho + \frac{\rho^2}{8} \le \frac{1}{4}$$

(se $r < 1$) dove ho usato anche la stima ottenuta precedentemente su r in funzione di ρ. Scegliendo $\rho \le \frac{1}{4}$ tutte e tre le stime sono verificate. Quindi ho trovato: $\rho = \frac{1}{4}$ e $r = \frac{1}{32}$.