Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 7 (7 NOVEMBRE 2008)
LIMITI IN PIÙ VARIABILI, RIPASSO

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y-xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan\left(x^3y^2\right)}{x^4+y^6} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2\log\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\pi+2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{y^2}{2\pi} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

   (e) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{|yz|}}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

2. Provare che $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{nx} e^{-t^2} dt$ è ben definita $\forall x \in \mathbb{R}$ e stabilire per quali x e continua e per quali è derivabile.

3. Discutere, al variare del parametro reale α, la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n^\alpha x\right)}{x\left(1+n^2x^2\right)}$, provare che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin\left(n^\alpha x\right)|}{x\left(1+n^2x^2\right)} dx < +\infty \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e che $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin\left(n^\alpha x\right)|}{x\left(1+n^2x^2\right)} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 0$

4. Sia $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tale che $f(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\displaystyle\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$. Provare che f ha almeno un punto di massimo assoluto. Mostrare infine che la funzione $f(x,y) = \dfrac{\sin\left(e^{-x^4}\right)}{1+x^2+y^2+\arctan\left(1+y^6\right)}$ verifica le ipotesi richieste e calcolare il suo massimo.