

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 2 (3 OTTOBRE 2008)

SERIE DI FUNZIONI, SERIE DI POTENZE

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:

<http://www.lifedreamers.it/liuck>

1. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} & \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2x) e^{-nx^2}}{1+n^2+x^2} & \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^x}{x^n} \\ \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} n^x & \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2} \arctan(nx) & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} x^{\log n} \\ \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(nx)}{n^2} & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+n^2x^2} & \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{x}{n}} e^{-n^4 t^2} dt \end{array}$$

2. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e discuterne il comportamento sul bordo dell'intervallo di convergenza:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} & \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} x^n & \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n x^n \end{array}$$

3. Calcolare:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n x)}{n^2} dx & \text{(c)} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n n^x} dx \\ \text{(b)} \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n dx & \text{(d)} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) e^{-nx}}{n+1} dx \end{array}$$

4. Provare che $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ è una funzione ben definita e continua su tutto \mathbb{R} e stabilire per quali x è derivabile.

5. Dare un esempio, ove possibile, di una serie di funzioni che su tutto \mathbb{R} converga:

- Puntualmente e uniformemente ma non assolutamente né totalmente.
- Puntualmente, uniformemente e totalmente ma non assolutamente.
- Puntualmente e assolutamente ma non uniformemente né totalmente.
- Puntualmente, assolutamente e totalmente ma non uniformemente.
- Puntualmente ma non assolutamente né uniformemente né totalmente.
- Puntualmente, assolutamente, uniformemente ma non totalmente.