

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 12 (16 DICEMBRE 2008)

EQUAZIONI DIFFERENZIALI, RIPASSO

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:

<http://www.lifedreamers.it/liuck>

1. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

(a) $\ddot{x} - 4x = 0$

(b) $\dddot{x} - 2\ddot{x} + \dot{x} - \ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0$

(c) $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = e^{2t}$

(d) $\ddot{x} - 2\dot{x} - 4\dot{x} + 8x = 4t$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a)
$$\begin{cases} \ddot{x} - \dot{x} = 0 \\ \ddot{x}(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \\ \ddot{x}(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} \ddot{x} + 4x = \sin t \\ \dot{x}(0) = -\frac{2}{3} \\ x(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} \ddot{x} - 3\dot{x} + 3\dot{x} - x = e^t \\ \ddot{x}(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 3 \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

3. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - x = e^{-t}$ tali che $x(0) = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$.

4. Determinare i punti di equilibrio dei seguenti problemi di Cauchy, discuterne al variare del dato iniziale x_0 l'unicità locale e globale e, in caso di unicità, determinare l'intervallo massimale di esistenza:

(a)
$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x^2} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} (x^3 - x) \log |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

5. Studiare la continuità, l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la dif-

ferenziabilità della funzione $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 y z}{x^4 + y^2 + z^4} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$.

6. Determinare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = 3x^5 - 5x^3 + 2y^2$ e stabilire quali di essi sono di massimo e quali di minimo locale.