Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Tutorato numero 11 (12 Dicembre 2008)
Equazioni differenziali, massimi e minimi vincolati

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

   (a) $\begin{cases} \dot{x} = 4x \\ x(0) = 3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x} + x = \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} \dot{x} = xe^{tx} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} \dot{x} = 2xt^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} t\dot{x} + x = t^2x^2 \\ x(1) = 1 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} \dot{x} - tx = 2t^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \dot{x} = t^2x^4 \\ x(1) = 2 \end{cases}$ (i) $\begin{cases} \ddot{x} = -2\dot{x} \\ \dot{x}(0) = -1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

2. Provare che il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = |x|^\alpha \\ x(0) = 0 \end{cases}$ ammette un'unica soluzione $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$, e determinare tale soluzione esplicitamente. Mostrare inoltre che per $\alpha \in (0,1)$ esistono infinite soluzioni.

3. Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y) = \displaystyle\int_{x^2}^{y^2} e^{t^2}\,dt$ sull'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$.

4. Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y,z) = x + y + z$ sull'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

5. Sia $X = (C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Provare che la mappa $T : X \to X$ definita come $(Tf)(x) = \displaystyle\int_0^1 ye^{-x^2y^2} f(y)\,dy$ è una contrazione.