Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 2 (3 Ottobre 2008)
Serie di funzioni, serie di potenze

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ è una serie geometrica di ragione e^{-x} e dunque converge $\Leftrightarrow |e^{-x}| < 1 \Leftrightarrow x > 0$; la convergenza non è uniforme (e quindi neanche totale) in $(0, +\infty)$ perché la serie non converge ai bordi di questo intervallo in quanto per $x = 0$ si ha $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$; c'è però convergenza totale (e quindi anche uniforme) negli intervalli del tipo $[\delta, +\infty)$ $\forall \delta > 0$ perché $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in[\delta,+\infty)} |e^{-nx}| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} < +\infty$.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^x$ è la serie armonica generalizzata e quindi converge in $(-\infty, -1)$; la convergenza non è uniforme (e dunque neanche totale) perché in $x = 1$ la serie diverge, ma è totale (e quindi anche uniforme) sugli intervalli $(-\infty, -1-\delta]$ in quanto $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in(-\infty,-1-\delta]} |n^x| =$
   $= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\delta} < +\infty$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(nx)}{n^2}$ converge su tutto $\mathbb{R}$ perché $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x\sin(nx)}{n^2}\right| \leq$
   $\leq |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$; la convergenza non è uniforme (e neanche totale) su tutto $\mathbb{R}$ perché il termine n-esimo non tende uniformemente a 0: infatti $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x\sin(nx)}{n^2}\right| \geq \left|\frac{n^2\sin\left(n^3\right)}{n^2}\right| = \left|\sin\left(n^3\right)\right| \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$, ma è totale (e uniforme) negli intervalli limitati perché
   $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[-M,M]} \left|\frac{x\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[-M,M]} \left|\frac{x}{n^2}\right| = M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(n^2x\right) e^{-nx^2}}{1+n^2+x^2}$ converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$ perché
   $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\cos\left(n^2x\right) e^{-nx^2}}{1+n^2+x^2}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} < +\infty$.

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2} \arctan(nx)$ vale 0 se $x = 0$ e converge anche per $x \neq 0$ in quanto $\sum_{n=0}^{\infty} \left| e^{-nx^2} \arctan(nx) \right| \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2} < +\infty$; la convergenza non è uniforme (e neanche totale) in $\mathbb{R}$ perché il termine n-esimo non tende uniformemente a 0, in quanto $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-nx^2} \arctan(nx) \right| \geq$
$\geq \left| e^{-n\left(\frac{1}{n}\right)^2} \arctan\left(n\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{\pi}{4} e^{-\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$ ma è totale su $(-\infty, -\delta] \cup$ $\cup [\delta, +\infty)$ perché $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} |e^{-nx^2} \arctan(nx)| \leq$
$\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} e^{-nx^2} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta^2} < +\infty.$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n + n^2x^2}$ vale 0 per $x = 0$ e converge anche per tutti gli altri valori di x in quanto $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{n+n^2x^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{n^2x^2} \right| = \frac{1}{|x|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$; la convergenza inoltre è totale perché $\frac{d}{dx} \frac{x}{n+n^2x^2} = \frac{n - n^2x^2}{(n+n^2x^2)^2} =$
$= 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ e perciò, essendo $\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$,
$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x}{n+n^2x^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\pm\frac{1}{\sqrt{n}}}{n + n^2(\pm\frac{1}{\sqrt{n}})^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{n}} < +\infty.$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^x}{x^n}$ converge $\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ perché, applicando il criterio della radice, si ha che $\sqrt[n]{\left|\frac{n^x}{x^n}\right|} = \frac{1}{|x|}$, e per $x = \pm 1$ le serie valgono rispettivamente $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e divergono entrambe; poiché ai bordi di quest'intervallo la serie diverge, non può esserci convergenza uniforme (né totale); la convergenza non è uniforme neppure in $(-\infty, -1-\delta] \cup [1+\delta, +\infty)$ perché il termine n-esimo non tende uniformemente a 0, giacché $\sup_{x\in(-\infty,-1-\delta]\cup[1+\delta,+\infty)} \left| \frac{(-1)^n n^x}{x^n} \right| \geq$
$\geq \left| \frac{(-1)^n n^n}{n^n} \right| = 1$, ma è totale in $[-M, -1-\delta] \cup [1+\delta, M]$ $\forall M > 0$ perché $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[-M,-1-\delta]\cup[1+\delta,M]} \left| \frac{n^x}{x^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^M}{(1+\delta)^n} < +\infty.$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\log n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\log(x^{\log n})} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\log n \log x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\log n}\right)^{\log x} =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\log x}$ e dunque è una serie armonica generalizzata e converge

$\Leftrightarrow \log x \in (-\infty, -1) \Leftrightarrow x \in \left(0, \dfrac{1}{e}\right)$; dato che non cè convergenza in $x = \dfrac{1}{e}$, la convergenza non è uniforme su tutto l'intervallo ma è totale in $\left(0, \dfrac{1}{e} - \delta\right]$, in quanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \left(0, \frac{1}{e} - \delta\right]} \left|n^{\log x}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{e} - \delta} < +\infty$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{x}{n}} e^{-n^4 t^2} dt$ converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$ perché
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_0^{\frac{x}{n}} e^{-n^4 t^2} dt \right| \overset{(y=n^2 t)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_0^{nx} e^{-y^2} dy \right| \leq$
$\displaystyle\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$

2. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$: Il raggio di convergenza è $r = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}} = \dfrac{1}{1} = 1$; studiamo ora il comportamento della serie ai bordi di questo intervallo: per $x = 1$ abbiamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge e per $x = -1$ abbiamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} x^n$: utilizzando il criterio del rapporto troviamo che $r =$
   $\displaystyle= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n^n} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$
   $\displaystyle= \lim_{n\to\infty} \frac{e}{2(2n+1)} = 0$, quindi questa serie converge solo per $x = 0$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(3 + (-1)^n\right)^n x^n : r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(3 + (-1)^n\right)^n\right|}} =$
   $\displaystyle= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} 3 + (-1)^n} = \frac{1}{4}$; ai bordi dell'intervallo di convergenza la serie diverge perché in entrambe le serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(3 + (-1)^n\right)^n}{4^n}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(3 + (-1)^n\right)^n}{4^n}$ il termine n-esimo non tende a 0 ma oscilla.

3. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n x)}{n^2}$ converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$ in quanto
   $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\cos(\pi n x)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, quindi in particolare c'è convergenza uniforme in $[0, 1]$ e dunque è possibile scambiare serie e integrale: $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n x)}{n^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\cos(\pi n x)}{n^2} dx =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^1 \cos(\pi n x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[-\pi n \sin(\pi n x) \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ converge totalmente (e quindi uniformemente) su tutti gli intervalli del tipo $[-1+\delta, 1-\delta]$, perché $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in [-1+\delta, 1-\delta]} |(n+1)x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(1-\delta)^n < +\infty$; poiché l'intervallo di integrazione è contenuto nell'insieme in cui la serie converge totalmente, si possono scambiare serie e integrale: $\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} (n+1)x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[x^{n+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} 2 = 1.$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n n^x}$ converge totalmente (e quindi uniformemente) su tutto $[0, +\infty)$. perché $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [0,+\infty)} \left| \frac{\log n}{3^n n^x} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n} < +\infty$, dunque, essendo la serie a termini positivi, ciò è sufficiente per poter scambiare serie e integrali: $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n n^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\log n}{3^n n^x} dx =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n} \left[-\frac{1}{n^x \log n} \right]_0^{+\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n} \frac{1}{\log n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)e^{-nx}}{n+1}$ converge totalmente (e quindi uniformemente) su tutti gli intervalli del tipo $[\delta, +\infty)$, poiché

$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [\delta,+\infty)} \left| \frac{\cos(nx)e^{-nx}}{n+1} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [\delta,+\infty)} \frac{e^{-nx}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\delta}}{n+1} < +\infty$, ma poiché l'integrale è improprio e la serie non è a termini positivi, ciò non è sufficiente per poter scambiare serie e integrali; tuttavia $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)e^{-nx}}{n+1} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}$, e quest'ultima serie è a termini positivi, converge totalmente sui compatti per quanto visto sopra e dunque $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} dx =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left[-\frac{e^{-nx}}{n} \right]_0^{+\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) +$$

$+ \cdots = 1 < +\infty$, quindi la serie di partenza è equidominata e adesso possiamo scambiare serie e integrali: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)e^{-nx}}{n+1}dx =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(nx)e^{-nx}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty}\cos(nx)e^{-nx}dx \overset{(y=nx)}{=}$$

$$\overset{(y=nx)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}\int_0^{+\infty}\cos ye^{-y}dy = \int_0^{+\infty}\cos ye^{-y}dy =$$

$$= [\sin ye^{-y}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\sin ye^{-y}dy = 0 + [-\cos ye^{-y}]_0^{+\infty} -$$

$$- \int_0^{+\infty}\cos ye^{-y}dy \Rightarrow \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)e^{-nx}}{n+1}dx =$$

$$= \int_0^{+\infty}\cos ye^{-y}dy = \frac{[-\cos ye^{-y}]_0^{+\infty}}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. $f(x)$ è ben definita perché $f(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\arctan(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$ $\forall x \in \mathbb{R}$; tale funzione è continua perché la successione delle somme parziali $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{\arctan(nx)}{n^2}$ è una successione di funzioni continue (in quanto somme finite di funzioni continue) e inoltre, essendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\arctan(nx)}{n^2}\right| \leq$ $\leq \displaystyle\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$, la convergenza è totale e quindi anche uniforme, e dunque la continuità viene mantenuta passando al limite; per quanto riguarda la derivabilità di f, la serie delle derivate $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\left(1+n^2x^2\right)}$ converge uniformemente su ogni insieme del tipo $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ e quindi, per il teorema di derivazione per serie di funzioni, f è derivabile in ogni $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ e dunque anche in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; in 0 invece la serie della derivata non converge e quindi la derivabilità va verificata "a mano": $f'(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(nx)}{n^2x} \geq$ $\geq \displaystyle\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{N}\frac{\arctan(nx)}{n^2x} = \sum_{n=1}^{N}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(nx)}{n^2x} = \sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n^2\left(1+n^2x^2\right)} =$ $= \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \geq M\ \forall M > 0$, quindi $f'(0) = +\infty$ e cioè f non è derivabile in 0.

5. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$: la convergenza è uniforme perché è una serie di funzioni costanti, ma non è assoluta (e quindi neanche totale) perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$.

   (b) Non esistono, in quanto la convergenza totale implica quella assoluta.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2} \arctan(nx)$. (La convergenza di questa serie è stata discussa al punto f del primo esercizio).

(d) Non esistono, in quanto la convergenza totale implica quella uniforme.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n}$: fissato x, la serie converge puntualmente ma non assolutamente; inoltre, la convergenza non è uniforme (e quindi neanche totale) perché $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=N}^{N+p} \frac{(-1)^n x}{n} \right| \geq \left| \sum_{n=N}^{N+p} \frac{(-1)^n n}{n} \right| = \left| \sum_{n=N}^{N+p} (-1)^n \right| \overset{n\to\infty}{\nrightarrow}$ $\overset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0$.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\chi_{[n-1,n)}$: fissato x, la serie è costituita da un unico termine e quindi la convergenza è puntuale e assoluta; inoltre, è uniforme, perché $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\chi_{[n-1,n)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\chi_{[n-1,n)} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n}\chi_{[n-1,n)} =$ $= \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; tuttavia, non c'è convergenza totale in quanto $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\chi_{[n-1,n)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.