Cognome e nome ____________________

PRIMO ESONERO DI AM1C
8 APRILE 2009

Esercizio 1.
(a) Data la funzione

$$f(x) = \log |\frac{1-x}{1+x}|$$

determinare: insieme di esistenza e di derivabilità, limiti ed eventuali asintoti, eventuali massimi, minimi e punti di flesso, intervalli di convessità. Tracciarne un grafico qualitativo.
(b) Scrivere l'equazione della retta tangente a f nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

Cognome e nome ____________________

PRIMO ESONERO DI AM1C
8 APRILE 2009

Esercizio 2.
(a) Dimostrare che per ogni x nell'intervallo $(1, +\infty)$ vale la seguente identità:

$$\arctan \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{4}\pi = -\arctan x \quad .$$

(b) Sia $f(x) = \arctan(\frac{x+1}{x-1})$. Dimostrare che f è invertibile in $(-\infty, 1)$ e, indicata con g la sua funzione inversa, calcolare $g'(0)$.

Cognome e nome ____________________

PRIMO ESONERO DI AM1C
8 APRILE 2009

Esercizio 3.
(a) Enunciare e dimostrare il teorema di Heine- Cantor.
(b) Stabilire l'uniforme continuità della seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^x \arctan x}{x} \qquad \text{in}(-\infty, 0) \text{ e in } (0, +\infty) \quad .$$

(c) Dopo aver dato la definizione di funzione lipschitziana, dimostrare che una funzione definita in un intervallo e derivabile con derivata prima limitata in ogni punto del suo dominio è lipschitziana.

Cognome e nome ____________________

PRIMO ESONERO DI AM1C
8 APRILE 2009

Esercizio 4.
(a) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.
(b) Dimostrare che vale la seguente disuguaglianza

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \quad \forall x \in [-1, +\infty), \quad \forall \alpha > 1 \quad .$$

Cognome e nome ____________________

PRIMO ESONERO DI AM1C
8 APRILE 2009

Esercizio 5.
(a) Discutere la derivabilità di f al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, dove

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x+1) + a & \text{se } x \leq -1 \\ \log\sqrt{x+2} + b(x-1) & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

1 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1) (a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. È una funzione dispari, infatti

$$f(-x) = \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \log\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^{-1} = -f(x) \quad .$$

$f = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $f > 0 \Leftrightarrow x < 0$.
Le rette $x = \pm 1$ sono asintoti verticali (da destra e da sinistra); la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale.

$$f'(x) = -\frac{2}{1-x^2} \quad , \quad f''(x) = -\frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

f è decrescente in $(-1, 1)$ ed è concava in $[0, 1) \cup (1, +\infty)$, 0 è punto di flesso.

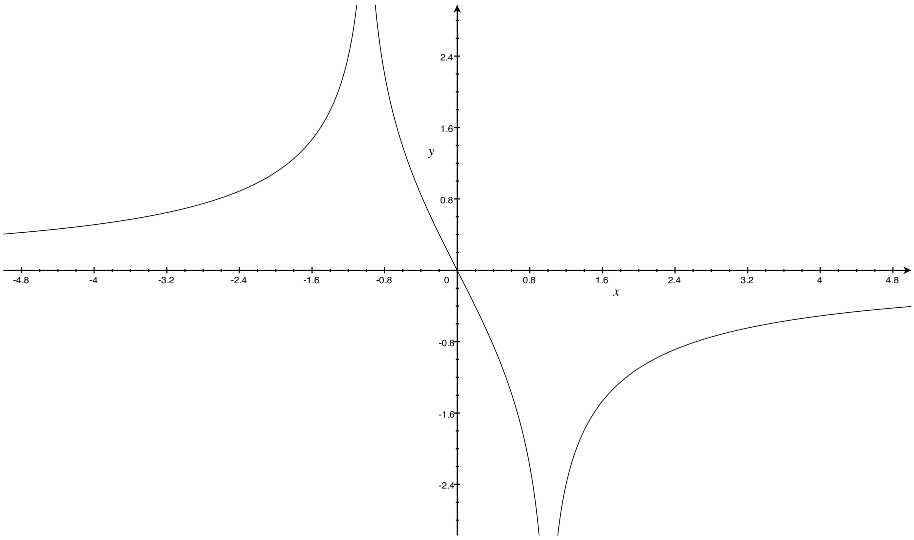

Figura 1: Il grafico di $y = \log|\frac{1-x}{1+x}|$

(b) $f(0) = 0$ e $f'(0) = -2$, quindi la retta tangente al grafico di f in $(0, 0)$ è la retta di equazione

$$y = -2x.$$

ESERCIZIO 2

(a) Sia

$$f(x) = \arctan \frac{x+1}{x-1} + \arctan x \quad .$$

Poiché $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0$, segue dal teorema di Lagrange che $f(x)$ è costante in ogni intervallo del suo dominio. In $(1, +\infty)$

$$f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3}{4}\pi$$

da cui segue l'identità che si voleva dimostrare.
(b) Sia ora $f(x) = \arctan \frac{x+1}{x-1}$. f è strettamente decrescente nell'intervallo dato, come si vede dal segno della sua derivata prima, e dunque è invertibile. Sia $g = f^{-1}$. Essendo $f(-1) = 0$, per il teorema della derivata delle funzione inversa, si ha

$$g'(0) = \frac{1}{f'(-1)} = -2 \quad .$$

Osservazione 1 *È facile anche di ricavare una espressione esplicita dell'inversa di f che è la funzione*

$$g(x) = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} \quad e \quad g'(x) = -2\frac{\tan^2 x + 1}{(\tan x - 1)^2} \quad ,$$

da cui

$$g'(0) = -2 \quad .$$

ESERCIZIO 3
(b) In $(-\infty, 0)$ f è U.C. poiché f ammette asintoto orizzontale (per $x \to -\infty$, che è l'asse delle x) e

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$$

quindi f è prolungabile per continuità a tutto l'intervallo $(-\infty, 0]$.
In $(0, +\infty)$ f non è U.C. perché non soddisfa il lemma della farfalla.
(c) Sia $I = \text{Dom}(f)$ e siano $a, b \in I$, con $a < b$. Sia inoltre $k \in \mathbb{R}$ tale che $|f'(x)| \leq K \; \forall x \in I$. Per il teorema di Lagrange esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)(b - a)| \leq K|b - a|$$

che è proprio la definizione di lipschitzianità.

ESERCIZIO 4

(b) Sia

$$f(x) = (1 + x)^\alpha - (1 + \alpha x) \quad .$$

$(f(-1) = \alpha - 1 > 0.)$

Allora

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha - 1} - \alpha \geq 0 \Leftrightarrow 1 + x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Quindi 0 è un punto di minimo locale per f e $f(0) = 0$. Poiché f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-1, 0)$, 0 è anche il minimo assoluto di f cioè $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [-1, +\infty)$.

ESERCIZIO 5

Continuità in -1:

$$f(-1) = a = \lim_{x \to -1^+} f(x) = -2b \Leftrightarrow a = -2b \quad .$$

Derivabilità in -1:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\arctan h}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\log \sqrt{1 + h} + b(-2 + h) + 2b}{h}$$

se e solo se

$$1 = \frac{1}{2} + b \quad .$$

f è derivabile in 0 se $b = \frac{1}{2}$, $a = -1$.