

Am1c – Tutorato VI

Riepilogo

Mercoledì 1 Aprile 2009

Filippo Cavallari

Esercizio 1 Dire per quale valori dei parametri le seguenti funzioni sono continue e derivabili nell'origine:

$$(1) \begin{cases} 4x^2 - 3x + 7 & x \geq 0 \\ ae^x + c & x < 0 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} a \sinh x + b & x \geq 0 \\ 4x^2 + 2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

Esercizio 2 Discutere l'uniforme continuità delle seguenti funzioni, eventualmente al variare dei parametri, negli intervalli indicati:

$$(1) \sqrt{|x|} - \sqrt[3]{x} \quad [1; +\infty) \quad \mathbb{R} \qquad (2) |x|^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (-1; 1) \quad [1; +\infty)$$
$$(3) x^\alpha \log^\beta x \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (0; 1) \quad [1; +\infty) \qquad (4) e^{\alpha x} \quad (-\infty; 1) \quad [1; +\infty)$$

Esercizio 3 Sia $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio a coefficienti reali di grado pari $n \geq 2$ tale che $a_n > 0$ $a_0 < 0$. Dimostrare che tale polinomio ammette almeno due radici reali, una positiva e una negativa.

Esercizio 4 Mostrare che $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

Esercizio 5 Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

$$(1) \frac{1}{\sin x} \geq 2 - 2\sqrt{3} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \quad x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$$

$$(2) x + \sin x \leq 2(e^x - 1) \quad x \geq 0$$

$$(3) x^x \geq x \quad x > 0$$

Esercizio 6 Studiare il grafico della funzione $f(x) = \ln(1 + 2 \sin^2 x)$