Am1c – (alcune…) Soluzioni Tutorato V

Studio di funzioni

Mercoledì 25 Marzo 2009

Filippo Cavallari

Esercizio 1 (4) Risulta utile il calcolo del seguente limite:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{\left(2x^2-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(2x^2-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{\left(2x^2-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x}-1\right)^2}-x^2\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x}-1\right)^2}-x\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+1\right)}=\frac{2}{3}$$

(abbiamo utilizzato l'identità $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$ con $a=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$ e $b=x$).

Esercizio 2 (1) Posto $f(x)=x-\sin x$ si ha che $f(0)=0$ e che $f'(x)=1-\cos x\geq 0\quad\forall x>0$

Analogamente posto $f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$ si ha che $f(0)=0$ e che $f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$ la quale è non negativa perché $f'(0)=0$ e derivandola si riconduce alla disuguaglianza precedente.

(2) Posto $f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$ la tesi segue dall'esercizio precedente.

Esercizio 3 Utilizzando il suggerimento si vede facilmente che derivando la funzione $f(x)=xy-\frac{x^p}{p}$ si ottiene $f'(x)=y-x^{p-1}$ e quindi tale funzione ha un massimo in corrispondenza del punto $x=y^{\frac{1}{p-1}}$. Si ha dunque che $xy-\frac{x^p}{p}\leq y^{\frac{1}{p-1}+1}-\frac{1}{p}y^{\frac{p}{p-1}}=y^{\frac{p}{p-1}}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{y^q}{q}$, cioè la tesi.

Esercizio 4 Se $y = 0$ la tesi è ovvia. Supponiamo quindi $y > 0$. Raccogliendo y^p otteniamo

$$y^p\left(\frac{x^p}{y^p}+1\right) \le y^p\left(\frac{x}{y}+1\right)^p \le y^p 2^{p-1}\left(\frac{x^p}{y^p}+1\right)$$

e quindi, dividendo per y^p, si ha

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p + 1 \le \left(\frac{x}{y}+1\right)^p \le 2^{p-1}\left[\left(\frac{x}{y}\right)^p + 1\right]$$

posto $t = \frac{x}{y}$ dobbiamo dunque mostrare che

$$t^p + 1 \le (t+1)^p \le 2^{p-1}\left(t^p + 1\right) \quad \forall t \ge 0 \tag{1.1}$$

Posto $f(t) = (t+1)^p - t^p - 1$, dato che $f'(t) = p\left[(t+1)^{p-1} - t^{p-1}\right] > 0$ (in quanto la funzione $h(t) = t^r$ è strettamente crescente se $r > 0$), allora f è crescente. Essendo $f(0) = 0$ risulta provata la prima disuguaglianza di (1.1).

Posto $g(t) = 2^{p-1}\left(t^p + 1\right) - (t+1)^p$, dato che $g'(t) = p\left[(2t)^{p-1} - (t+1)^{p-1}\right]$, si ha che

$$\begin{aligned} g'(t) &< 0 \quad 0 \le t < 1; \\ g'(t) &= 0 \quad t = 1; \\ g'(t) &> 0 \quad t > 1. \end{aligned}$$

Dunque il punto $t = 1$ è un minimo per g. Pertanto $0 = g(1) \le g(t)$ cioè la seconda disuguaglianza di (1.1).