AM1 2009-2008: II APPELLO- 13/07/2009

Esercizio 1- Si detrminino estremo superiore e inferiore, ed eventualmente massimo e minimo, dei seguenti insiemi:

(a) $\left\{ \frac{3n^2}{n^2+1} \ : n \in \mathbb{N} \right\}$;

(b) $\left\{ \frac{3n^2 \ \sin(n \, \frac{\pi}{2})}{n^2+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Esercizio 2- Calcolare i seguenti limiti di successioni:

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^{2^n}}}[n \log(\frac{n+3}{n})^2]$;

(b) $\lim_{n\to+\infty}(1 + \sin\frac{1}{n^3})^{n^3}$;

(c) al variare di α, $\lim_{n\to+\infty}[\log n^\alpha + \frac{1}{n^{\alpha+1}}]$;

ricordando i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(a_n + 1)}{a_n} = 1; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1; \quad \lim_{n\to+\infty}(1 + a_n)^{1/a_n} = e; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$$

dove a_n é una successione t. c. $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

Esercizio 3- Dimostrare, mediante il principio di induzione, che vale

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right)$$

e studiare il comportamento per $n \to +\infty$.

Esercizio 4- Stabilire se i seguenti insiemi sono chiusi o aperti e se hanno eventualmente punti di accumulazione o isolati:

(a) $A = \{\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ 2\log x^2 < 3 \,\}$;

(b) $B = \{\, x \in \mathbb{R} : \ \log_2(6\,x) + 2\log_2 x - \log_2(3\,x) = 4 \,\}$;

(c) $C = \{\, x \in \mathbb{R} : \ \sqrt{x^2 + 2} \le x + 3 \,\}$.

Esercizio 5- Studiare la convergenza ed eventualmente la convergenza assoluta delle seguenti serie:

(a) al variare di $\alpha > 0$ $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin\frac{1}{n^3})n^{\frac{3}{2}-2\,\alpha}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,\pi)e^{-2\,n}\log n}{n}$.