Esercitazione di AC01 N 8 13-05-09

Esercitatore: Maristella Petralla

Teorema di Rouché

Sia $P(z) = z^3 + 2z^2 + 5z + 1$. Calcolare il numero di radici di $P(z)$ in $B_1(0)$ e in $B_4(0)$.

Serie di Laurent

1. Studiare i diversi sviluppi di Laurent di $f(z) = \frac{1}{(z-2\,i)(z+i)}$ in $z_0 = -i$.

2. Trovare lo sviluppo di Laurent delle seguenti funzioni nei rispettivi domini:

   (a) $f(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ in $z_0 = 0$ per $|z| > 0$;

   (b) $f(z) = \sin\left(\frac{z}{1-z}\right)$ in $z_0 = 1$ per $|z-1| > 0$;

   (c) $f(z) = \log\left(1 - \frac{2}{z^2}\right)$ in $z = 0$ per $|z| > \sqrt{2}$.

3. Studiare i diversi sviluppi di Laurent di $f(z) = \frac{1}{(1-z\,i)(z+2)}$ in $z_0 = 0$.

4. Classificare le singolaritá delle seguenti funzioni tramite il loro sviluppo di Laurent:

   (a) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$;

   (b) $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2}$;

   (c) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$;

   Soluzioni

   (a) $f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2\,n}}{(2\,n+1)!}$ $z = 0$ é una singolaritá eliminabile perché $c_n = 0$ per ogni $n < 0$;

   (b) $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-1} \frac{(z+1)^n}{(n+2)!}$ $z_0 = -1$ é una singolaritá di tipo polo di ordine 2 perché esiste $c_{-2} \neq 0$;

   (c) $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$ $z_0 = 0$ é una singolaritá essenziale perché esistono infiniti termini c_n con $n < 0$.