Esecitazione AC01 n.1-A.A. 2008-2009-04/03/09

Esercitatore: Maristella Petralla

Potenza, esponenziale, logaritmo, seno, coseno complesso

Sia $z \in \mathbb{C}$ allora $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Sia $n \in \mathbb{N}$ si definisce

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{i\,n\,\theta}.$$

Si possono definire anche le radici di un numero complesso

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = \{\ \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ k = 0, \ldots, n-1\}$$

geometricamente le radici $n-$esime di z sono i vertici di un poligono regolare di n lati nella circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt[n]{\rho}$,

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log|x|} e^{\frac{1}{n}(\mathrm{arg}z+2\pi k)} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\mathrm{arg}+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\mathrm{arg}z+2\pi k}{n}).$$

L'esponenziale complesso è la piú importante funzione della matematica. Ogni funzione cosiddetta elementare (esponenziale reale, coseno, seno, e loro inverse locali, come logaritmo, arcocoseno, ecc.) proviene dalla funzione esponenziale complessa. La funzione esponenziale complessa è la funzione continua $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita ponendo

$$\exp\ z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{per ogni} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Si ha ovviamente $\exp 0 = 1$. Inoltre exp è derivabile in senso complesso su tutto $\mathbb{C}$, e la sua derivata é $(\exp z)' = \exp z$, come si pu ricavare applicando la dfinizione di derivata complessa. Si ha la relazione funzionale fondamentale: $\exp(z + w) = \exp z \exp w$.

Si ha quindi $\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, essendo $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z - z) = \exp 0 = 1$. L'esponenziale complesso non assume il valore zero. Dalla definizione si ha subito che se $x \in \mathbb{R}$, ed $x > 0$ si ha $\exp x > 1$; ne segue che se $x \in \mathbb{R}$, ed $x < 0$ si ha $0 < \exp x < 1$. L'esponenziale reale è sempre strettamente positivo; poiché esso coincide con la sua derivata, è anche strettamente crescente. Se si pone $e = \exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, si ha $2 < e < 3$, e si puo' dimostrare che la restrizione ad $\mathbb{R}$ della funzione esponenziale complessa è la

solita funzione esponenziale.
Si ha $e^{\bar{z}} = \overline{(e^z)}$ (l'esponenziale del coniugato di z è il coniugato dell'esponenziale di z), come segue subito passando al limite per $n \to +\infty$ nella formula $\sum_{n=0}^{m} \frac{(\bar{z})^n}{n!} = \overline{\sum_{n=0}^{m} \frac{z^n}{n!}}$ (vera perché il coniugato di una somma è la somma dei coniugati, il coniugato di un prodotto è il prodotto dei coniugati, ecc.). Se ne deduce $|\exp z|^2 = (\exp z)\overline{(\exp z)} = (\exp z)(\exp \bar{z}) = \exp(z+\bar{z}) = \exp(2\mathrm{Re}\, z) = e^{2\,\mathrm{Re}\, z}$, da cui $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$. Ne segue: $|e^z| = 1$ se e solo se $\mathrm{Re}\, z = 0$. L'asse immaginario è trasformato dall'esponenziale sul circolo $U = \{\, w \in \mathbb{C} \,:\, |w| = 1 \,\}$ dei segni complessi.
Se t è reale, come appena visto il numero complesso e^{it} ha modulo 1; si noti che e^{-it} è sia il coniugato che il reciproco di e^{it}. Si pone, per definizione:

$$\cos t := \mathrm{Re}(e^{it}); \quad \sin t = \mathrm{I}m(e^{it}), \qquad \text{per ogni} \quad t \in \mathbb{R},$$

di modo che, ricordando che per ogni numero complesso z si hanno le seguenti Formule di Eulero

$$e^{it} = \cos t + i \sin t; \cos t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}; \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

infatti

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\,z)^k}{k!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(i\,z)^{2h}}{(2\,h)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\,z)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h\, z^{2h}}{(2h)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, z^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$\cos z + i \sin z$$

qundi $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, osserviamo che $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$, $e^{iz} - e^{-iz} = \cos z + i \sin z - \cos z + i \sin z = 2i \sin z \quad \Longrightarrow \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.
La funzione esponenziale é olomorfa pertanto lo anche la funzione sin, deriviamola $(\sin z)' = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$.
L'esponenziale complesso mappa il piano $\mathbb{C}$ sul piano bucato $\mathbb{C} \backslash \{0\}$. Trasforma le rette parallele all'asse reale della forma $\{\, x + iy \,:\, x \in \mathbb{R} \,\}$, con $y \in \mathbb{R}$ fissato, vengono trasformate nella semiretta che parte dall'origine e che forma un angolo di y radianti con il semiasse reale positivo (infatti $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, ed e^x, modulo del numero complesso $e^x(\cos y + i \sin y)$, descrive al variare di $x \in \mathbb{R}$ tutti i reali strettamente positivi. Le rette parallele all'asse immaginario, $\{\, x + iy \,:\, y \in \mathbb{R} \,\}$ con $x \in \mathbb{R}$ fissato, vengono invece avvolte sul circolo di centro l'origine e raggio e^x. Ricordare che

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad \text{(l'esponenziale complesso è periodico di periodo } 2\pi i\text{)},$$

inoltre si ha $e^w = e^z \iff w = z + 2\pi i$, per un k intero, in particolare $e^z = 1$ se e solo se $z = 2\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$. Si ha anche $e^z = -1 \iff z = i\pi + 2\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$. Si noti che l'intero sempiano $\{\, \mathrm{Re}\, z < 0 \,\}$ è trasformato dall'esponenziale nel disco unitario aperto $\{\, |z| < 1 \,\}$, il sempiano $\{\, \mathrm{Re} z > 0 \,\}$ si applica invece sullfinsieme dei punti esterni al disco unitario$\{\, |z| > 1 \,\}$. Ogni striscia semiaperta $\{\, a < Imz \leq a + 2\pi \,\}$ di ampiezza 2π, parallela all'asse reale, è applicata dall'esponenziale su tutto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Vogliamo risolvere l'equazione $e^w = z$, per $z \in \mathbb{C}$ fissato, nell'incognita complessa w. Se $z = 0$ non ci sono soluzioni, dato che l'esponenziale complesso non assume il valore 0 (si ha $1 = e^0 = e^{w-w} = e^w e^{-w}$ per ogni $w \in \mathbb{C}$). Sia quindi $z = x + iy$, con x, y reali non entrambi nulli.
Se $w = \xi + i\eta$, con ξ, η reali, si ha $e^w = e^{\xi + i\eta} = e^\xi(\cos\eta + i \sin\eta)$, con $e^\xi = |e^w|$ posto $z = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, $e^w = z$ si ha se e solo se $e^\xi = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$; $\eta = \alpha + 2\pi k \ \ (k \in \mathbb{Z})$. Ne viene che tutte le possibili soluzioni cercate sono date dalla formula

$$w = \log|z| + i(\alpha + 2\pi k) \ \ (k \in \mathbb{Z});$$

sono infinite, e due di esse differiscono per un multiplo intero di $2\pi k$ (che è il periodo dell'esponenziale complesso).
Il logaritmo principale di un numero complesso non nullo è , per definizione

$$\log z = \log|z| + i\mathrm{arg} z,$$

dove $\log|z|$ è l'usuale logaritmo reale definito sui reali strettamente positivi, e $\mathrm{arg} z$ è l'argomento principale appena definito; tutte le soluzioni dell'equazione $e^w = z$ sono quindi date dalla formula $w = \log z + 2k\pi i$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Il logaritmo principale è discontinuo su tutti i punti della semiretta reale negativa, per maggior precisione la sua parte immaginaria arg lo è: nei punti immediatamente al di sotto di un reale negativo l'argomento è vicino a $-\pi$, e non a π, come è geometricamente evidente. Possiamo definire il seno e il coseno iperbolico. Le funzioni circolari sono, nell'ambito complesso, essenzialmente indistinguibili dalle funzioni iperboliche; si pone, per definizione

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

di modo che si hanno gli sviluppi in serie di potenze:

$$\cosh z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{(2k+1)!}.$$

Dalle formule di Eulero si ha subito $\cos(\pm iz) = \cosh z; \cosh(\pm iz) = \cos z$ (ruotando di $\pi/2$ in verso orario od antiorario sul dominio un coseno si ottiene un coseno iperbolico, e viceversa). Si ha poi: $\sin(iz) = i \sinh z; \sinh(iz) = i \sin z$. Si noti che le funzioni circolari sono limitate su $\mathbb{R}$, ma non su $\mathbb{C}$: sull'asse immaginario il coseno diventa il coseno iperbolico. Si hanno subito anzi le formule per parte reale e coefficiente dell'immaginario delle funzioni circolari se $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

ed anche

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$