II Esonero di AC1 - 28/5/2009 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
Applichiamo il metodo dei residui sul settore circolare di $B_R(0)$ compreso tra la retta Im $z = 0$ e la retta Im $z =$ Re z con $R \to +\infty$. Otteniamo

$$(1 - ie^{\frac{\pi i}{4}}) \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^8} dx = 2\pi i \text{Res}\,(\frac{z^2}{1+z^8}; e^{\frac{i\pi}{8}}) = \frac{\pi}{4} i e^{-\frac{i5\pi}{8}},$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^8} dx = \frac{\pi}{2(1+\sqrt{2})} \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Esercizio 2
a) Ricordiamo i seguenti sviluppi di Taylor basati sulla serie geometrica:

$$\tfrac{z}{z-1} = \tfrac{1}{1-z^{-1}} = \sum_{n=-\infty}^{0} z^n \qquad \text{in } \mathbb{C} \setminus B_1(0)$$

$$\tfrac{1}{(2-z)^2} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{1-\frac{z}{2}})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)z^n}{2^{n+2}} \quad \text{in } B_2(0).$$

Allora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{1} z^n + \frac{5}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)z^n}{2^{n+2}} \quad \text{in } B_2(0) \setminus B_1(0).$$

b) La funzione

$$g(z) = \frac{1}{(2-z)^2} + 1 = \frac{5}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)z^n}{2^{n+2}}$$

è chiaramente olomorfa in $B_2(0)$.
c) Dalla formula di Parseval abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta &= 2\pi \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2 \rho^{2n+1}}{4^{n+2}} + \frac{3}{2}\rho\right) d\rho \\ &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}} + \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{16}(\sum_{n=0}^{\infty} z^n)'(\frac{1}{4}) + \frac{3}{2}\pi \\ &= \frac{29}{18}\pi.\end{aligned}$$

Esercizio 3
Sia $g(z) = z^4 + 3z^3 + 3z^2 - 7z = z[(z+1)^3 - 8]$. Osserviamo che $g(z)$ ha esattamente quattro zeri

$$z_j = -1 + 2e^{\frac{2\pi}{3}ij}\ j = 0, 1, 2, \ \ z_3 = 0,$$

ed inoltre

$$|z_0| = 1 \ , \ \ |z_1| = |z_2| = \sqrt{5} \ , \ \ |z_3| = 0.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}
|g(z)| &\geq |z|[8 - (|z|+1)^3] = \frac{37}{16} > 1 = |f(z) - g(z)| \quad \text{per } |z| = \frac{1}{2} \\
|g(z)| &\geq |z|[(|z|-1)^3 - 8] = 76 > 1 = |f(z) - g(z)| \quad \text{per } |z| = 4.
\end{aligned}$$

Dal teorema di Rouché segue allora che $f(z)$ e $g(z)$ hanno esattamente lo stesso numero di zeri in $B_{\frac{1}{2}}(0)$ ed in $B_4(0)$, ossia $f(z)$ ha 3 zeri (contati con molteplicitá) in A.