I Esonero di AC1 - 16/4/2009 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
a) Applichiamo il metodo dei residui sul settore circolare di $B_R(0)$ compreso tra la retta $\mathrm{Im}\, z = 0$ e la retta $\mathrm{Im}\, z = \sqrt{3}\mathrm{Re}\, z$ con $R \to +\infty$. Otteniamo

$$(1 + e^{\frac{\pi i}{3}}) \int_0^\infty \frac{x^3}{1+x^6} dx = 2\pi i \mathrm{Res}\,(\frac{z^3}{1+z^6}; e^{\frac{i\pi}{6}}) = \frac{\pi}{3} i e^{-\frac{i\pi}{3}},$$

e quindi

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{1+x^6} dx = \pi \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Esercizio 2
Ricordiamo lo sviluppo di Taylor di $\ln(1+z)$ in $B_1(0)$:

$$\ln(1+z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Allora abbiamo che

$$f(z) = (\frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^4}) \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+2}}{n+1}.$$

a) La parte singolare $Q(z)$ di $f(z)$ in 0 vale quindi

$$Q(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z}.$$

b) La funzione $f_r(z) := f(z) - Q(z)$ ha invece il seguente svilupppo di Taylor in 0:

$$f_r(z) = \frac{1}{z^5} \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{z^{2n+2}}{n+1} + \frac{1}{z^4} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{z^{2n+2}}{n+1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{n+3} + \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{n+2},$$

il cui raggio di convergenza vale 1.
c) Infine abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \rho d\rho \int_0^{2\pi} |f_r(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\rho^{4n+3}}{(n+3)^2} + \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^{4n+1}}{(n+2)^2} \right) d\rho \\ &= 2\pi \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{4(n+1)(n+3)^2} + \frac{2}{(2n+1)(n+2)^2} \right) (\frac{1}{16})^{n+1} \\ &= \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{64} \sum_{n \geq 0} \frac{5n+7}{(n+1)(2n+3)(n+3)^2} (\frac{1}{16})^n. \end{aligned}$$

Esercizio 3
Ricordiamo che dal Terorema di Liouville le funzioni razionali sono le uniche funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$

con un numero finito di singolaritá polari e una singolaritá non essenziale all'infinito.
a) Poiché la funzione $f(z)e^{-z}$ ha esattamente una singolaritá eliminabile all'infinito e poli semplici $a_1, \dots, a_n$, esistono polinomi $P(z)$ e $Q(z)$ tali che $f(z)e^{-z} = c_1 \frac{P(z)}{Q(z)}$. Affinché valga

$$\lim_{|z| \to +\infty} \frac{f(z)}{e^z} = c_1,$$

si deve avere deg $P =$ deg Q con P, Q aventi lo stesso coefficiente di grado massimo (ossia 1, modulo dividere numeratore e denominatore per tale coefficiente). Supponendo che $P(z)$ e $Q(z)$ siano tra loro irriducibili, si ha $Q(z) = (z - a_1) \dots (z - a_n)$. Ossia,

$$f(z) = c_1 e^z (b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-1} z^{n-1} + z^n) \prod_{j=1}^{n} (z - a_j)^{-1}$$

per generici $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ (con $b_0 + b_1 a_j + \dots + b_{n-1} a_j^{n-1} + a_j^n \neq 0$ per $j = 1, \dots, n$).
b) La funzione $f(z)e^{-z-\frac{1}{z}}$ ha esattamente una singolaritá eliminabile in zero e all'infinito, e poli semplici $a_1, \dots, a_n$. Inoltre

$$\lim_{z \to 0} f(z)e^{-z-\frac{1}{z}} = c_2 \,, \qquad \lim_{|z| \to +\infty} f(z)e^{-z-\frac{1}{z}} = c_1.$$

Esattamente come prima, si ha che

$$f(z) = c_1 e^{z+\frac{1}{z}} (b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-1} z^{n-1} + z^n) \prod_{j=1}^{n} (z - a_j)^{-1}$$

per generici $b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ e $b_0 = (-1)^n \frac{c_2}{c_1} \prod_{j=1}^{n} a_j$.
c) Rimuovendo eventualmente la singolaritá eliminabile in zero, possiamo pensare la funzione $f(z)e^{-z-\frac{1}{z}}$ come una funzione intera limitata (poiché c_1 è un numero finito). Dal Teorema di Liouville

$$f(z) = ce^{z+\frac{1}{z}}$$

per una costante $c \in \mathbb{C}$ opportuna. In particolare, $c_1 = c = c_2$.