Appello B di AC1 - 16/6/2009 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
Poiché $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{1+x^4} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{1+x^4} dx.$$

Sia γ_R la semi-circonferenza di raggio R e centro l'origine nel semi-piano superiore. Dal Teorema dei residui si ottiene che

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^4} dx - \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^4} dz = 2\pi i \left[\text{Res } (\frac{e^{iz}}{1+z^4}, e^{i\frac{\pi}{4}}) + \text{Res } (\frac{e^{iz}}{1+z^4}, e^{i\frac{3\pi}{4}}) \right].$$

Siccome

$$\text{Res } (\frac{e^{iz}}{1+z^4}, e^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{i(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{4})}, \quad \text{Res } (\frac{e^{iz}}{1+z^4}, e^{i\frac{3\pi}{4}}) = -\frac{1}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-i(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{4})},$$

si ottiene che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{1+x^4} dx = -\pi e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{4}).$$

Esercizio 2
Scrivo $f(z)$ come

$$f(z) = \frac{3z^2}{(1-z^3)^2} + \frac{1}{2-z} = (\frac{1}{1-z^3})' + \frac{1}{2-z}.$$

Allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^{3n}$$

in $|z| < 1$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{1}{z^{3n+4}}$$

in $1 < |z| < 2$, e

$$f(z) = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{1}{z^{3n+4}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$$

in $|z| > 2$.

Esercizio 3
a) Dati $z_j = e^{\frac{\pi}{2} ij}$, $j = 0, 1, 2, 3$, abbiamo che

$$|g(z)| = |\prod_{j=0}^{3} (z - z_j)| \geq r \prod_{j \neq k} (|z_j - z_k| - |z - z_k|) = r(\sqrt{2} - r)^3$$

per $z \in \partial B_r(z_k)$.
b) Poiché $[r(\sqrt{2}-r)]' \geq 0$ esattamente in $[0, \frac{\sqrt{2}}{4}]$, abbiamo che $\frac{\sqrt{2}}{4}$ rappresenta il punto di massimo assoluto e vale quindi

$$\max_{r \in [0, \sqrt{2}]} r(\sqrt{2}-r)^3 = \frac{27}{64}.$$

c) Applichiamo il Teorema di Rouché su $B_{\frac{\sqrt{2}}{4}}(z_k)$. Abbiamo che

$$|f(z) - g(z)| = \frac{3}{16}|z| \leq \frac{3}{16}(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}) < \frac{27}{64} \leq |g(z)|$$

per $z \in \partial B_{\frac{\sqrt{2}}{4}}(z_k)$. Allora $f(z)$ ha uno zero semplice in ogni $B_{\frac{\sqrt{2}}{4}}(z_k)$, $k = 0, 1, 2, 3$, e quindi $f(z)$ possiede esattamente quattro zeri semplici.