Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

GE4 - Geometria Differenziale 1

TUTORATO III - LIVIA CORSI E GIORGIA PESTRIN (9-10-07)

ESERCIZIO 1. (Do Carmo, p. 25 es. 12) Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata (non necessariamente dall'ascissa curvilinea) e sia $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ una riparametrizzazione di $\alpha(I)$ tale che β è parametrizzata dall'ascissa curvilinea $s = s(t)$, e poniamo

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}, \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \ddot{\alpha}, \quad \frac{d^3\alpha}{dt^3} = \dddot{\alpha}, \quad \ldots$$

Dimostrare le seguenti affermazioni:
(1.1) $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{\alpha}|}$, $\quad \frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\dot{\alpha}\cdot\ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|^4}$.
(1.2) La curvatura di α in $t \in I$ è:

$$k(t) = \frac{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^3}$$

(*sugg: usare il fatto che* $(a \wedge b) \wedge c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$)
(1.3) La torsione di α in $t \in I$ è:

$$\tau(t) = -\frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}|^2}$$

(1.4) Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ è una curva piana $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, la curvatura con segno di α per $t \in I$ è:

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ESERCIZIO 2. (Do Carmo, p. 24 es. 10) Consideriamo l'applicazione:

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}), & t > 0 \\ (t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \end{cases}$$

(2.1) Provare che α è una curva differenziabile.
(2.2) Provare che α è regolare per ogni t e che, detta $k(t)$ la curvatura di α in t, $k(t) \neq 0$ per $t \neq 0$, $t \neq \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ mentre $k(0) = 0$.
(*sugg: usare il punto* 2 *dell'esercizio precedente.*)
(2.3) Mostrare che il limite dei piani osculatori per $t \to 0^+$, è il piano $y = 0$ mentre il limite dei piani osculatori per $t \to 0^-$, è il piano $z = 0$. (Questo implica che il vettore normale è discontinuo in $t = 0$ e mostra perché escludiamo i punti dove $k = 0$).
(2.4) Mostrare che, definendo τ per continuità, si ottiene che $\tau \equiv 0$ anche se α non è una curva piana.

ESERCIZIO 3.
(3.1) Dimostrare che la circonferenza $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ di centro l'origine e raggio R ha curvatura costante $k = \pm\frac{1}{R}$ dove il segno dipende dal verso di percorrenza.
(3.2) Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare parametrizzata, con curvatura $k(t) = k_0 \in \mathbb{R}$ costante assegnata. Cosa si può dire su $\alpha(t)$?

ESERCIZIO 4. Determinare la curvatura e la torsione delle seguenti curve:
(4.1) l'elica cilindrica di raggio a e passo b
(4.2) la cicloide, i.e. la curva parametrizzata $\mathcal{C}_1 = \{(t - \sin t, 1 - \cos t) \in \mathbb{R}^2 \, : \, t \in (0, 2\pi)\}$
(4.3) l'astroide $\mathcal{C}_2 = \left\{\left(\cos^2 t, \sin^2 t, \cos\frac{t}{2}\right) \in \mathbb{R}^3 \, : \, t \in (0, 2\pi)\right\}$