Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

GE4 - Geometria Differenziale 1

TUTORATO I - LIVIA CORSI E GIORGIA PESTRIN (25-09-07)

ESERCIZIO 1. Siano

$$\begin{array}{rcl} u(t) & = & (x(t), y(t), z(t)) \\ v(t) & = & (a(t), b(t), c(t)) \end{array}$$

due vettori in $\mathbb{R}^3$ che variano al variare del tempo $t \in I$ in maniera liscia (ad esempio vettori tangenti a due curve liscie). Dimostrare che il loro prodotto scalare

$$u(t) \cdot v(t) : I \to \mathbb{R}$$

è una funzione liscia. Dimostrare inoltre che per la derivata del prodotto scalare vale la seguente regola di Leibniz:

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = \dot{u}(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot \dot{v}(t) : I \to \mathbb{R}$$

ESERCIZIO 2. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata, con $\dot{\alpha} \neq 0 \ \forall t \in I$. Mostrare che $|\alpha(t)|$ è una costante non nulla (i.e. α giace su una sfera) se e solo se $\alpha(t)$ è ortogonale ad $\dot{\alpha}(t) \ \forall t \in I$.

ESERCIZIO 3. Sia $v = (a, b, c)$ un vettore fissato e sia $I \to \mathbb{R}^3$ una curva liscia, dove $I = [0, 1]$. Usare il Primo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale per dimostrare che

$$\int_0^1 v \cdot \dot{\alpha}(t) dt = v \cdot (\alpha(1) - \alpha(0))$$

ESERCIZIO 4. Mostrare che l'insieme $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = |x|\}$
(4.1) è la traccia di una curva regolare a tratti non liscia.
(4.2) è la traccia di una curva liscia.
(4.3) non può essere la traccia di una curva regolare.

ESERCIZIO 5. (Do Carmo, p.10 es.8) Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}$ una curva differenziabile e sia $[a, b] \subset I$ un intervallo chiuso. Per ogni partizione

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

di $[a, b]$, si definisce

$$l(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$$

dove P indica la partizione data. La norma $|P|$ di una partizione P è definita come

$$|P| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|$$

Geometricamente, $l(\alpha, P)$ è la lunghezza della poligonale inscritta in $\alpha([a, b])$ con vertici in $\alpha(t_i)$. Mostrare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, \delta > 0$ tale che se $|P| < \delta$, allora

$$\left| \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt - l(\alpha, P) \right| < \varepsilon$$

ESERCIZIO 6. (Do Carmo, p.7 es.3) Sia $OA = 2a$ il diametro di un cerchio S^1 e OY e AV le tangenti a S^1 in O e A rispettivamente. Una semiretta r è tracciata da O intersecando S^1 in C e la retta AV in B. Su OB sia $Op = CB$. Ruotando r intorno a O, il punto p descrive una curva chiamata *cissoide di Diocle*. Scegliendo OA come asse x e OY come asse y mostrare che:

(6.1) La traccia di

$$\alpha(t) = \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

coincide con la cissoide di Diocle. *(Sugg. porre $t = \tan\theta$)*
(6.2) L'origine $(0,0)$ è un punto singolare della cissoide.
(6.3) Al tendere di $t \to \infty$, $\alpha(t)$ si avvicina alla retta $x = 2a$ e $\dot{\alpha}(t) \to (0, 2a)$, i.e. la retta $x = 2a$ è un asintoto della cissoide.

<u>Esercizio 7.</u> (Do Carmo, p.7 es.4) Sia $\alpha : (0,\pi) \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log\tan\frac{t}{2} \right)$$

dove t è l'angolo che l'asse y forma con il vettore $\dot{\alpha}(t)$. La traccia di α è detta *trattrice*. Mostrare che:
(7.1) α è una curva differenziabile, regolare ovunque tranne che in $t = \pi/2$
(7.2) La lunghezza del segmento sulla tangente alla trattrice tra il punto di tangenza e l'asse y è identicamente uguale a 1.

<u>Esercizio 8.</u> (Do Carmo, p.8 es.6) Sia $\alpha(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, $b < 0$ costanti, una curva parametrizzata. Mostrare che:
(8.1) Al tendere di $t \to \infty$, la curva $\alpha(t)$ si avvicina all'origine seguendo una spirale (per questo la traccia di α è detta *spirale logaritmica*).
(8.2) Al tendere di $t \to \infty$ si ha $\dot{\alpha}(t) \to (0,0)$, e inoltre α ha ascissa curvilinea finita in $[t_0, \infty)$, i.e.

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(t)| dt < \infty$$