1. Un satellite artificiale, per entrare in orbita, deve passare da velocità nulla a V=6 Km/s. Se i razzi gli imprimono un'accelerazione costante, pari al 40% dell'accelerazione di gravità g,

a) quanto tempo impiega il satellite per raggiungere la velocità finale e quanto spazio percorre in questo tempo?

b) Se, una volta in orbita, i propulsori si spengono e il satellite si mantiene a velocità costante lungo l'orbita circolare, qual'è il raggio dell'orbita?

c) Qual'è il periodo di un'orbita?

$(G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/Kg^2, M_T = 5.98 \cdot 10^{24}\ Kg, R_T = 6.37 \cdot 10^6\ m)$.

Soluzione

a) Per calcolare quanto tempo impiega per raggiungere la velocità finale usiamo la relazione

$$V = V_0 + a \cdot t$$

. Sapendo che il satellite parte da fermo, quindi $V_0 = 0$, si trova:

$$t = \frac{V}{a} = \frac{V}{0.4 \cdot g} = \frac{6000}{0.4 \cdot 9.8} = 1530.6\ s$$

Lo spazio percorso risulta uguale a:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot (0.4 \cdot 9.8) \cdot 1530.6^2 = 4591.8\ Km$$

b) Una volta che il satellite ha raggiunto la sua orbita circolare intorno alla terra, esso è soggetto all'accelerazione centripeta

$$a_c = \frac{V^2}{R}$$

dove R è il raggio dell'orbita. L'accelerazione centripeta è dovuta alla forza di attrazione gravitazionale tra il satellite e la terra che si esprime tramite la legge della gravitazione di Newton:

$$F_g = G\frac{m \cdot M_T}{R^2}$$

Possiamo quindi scrivere la seconda legge della dinamica applicata al satellite:

$$F_g = m \cdot a_c \ \Rightarrow\ G\frac{m \cdot M_T}{R^2} = m \cdot \frac{V^2}{R}$$

dalla quale possiamo ricavare il raggio dell'orbita R:

$$R = \frac{G \cdot M_T}{V^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{(6 \cdot 10^3)^2} = 11 \cdot 10^3\ Km$$

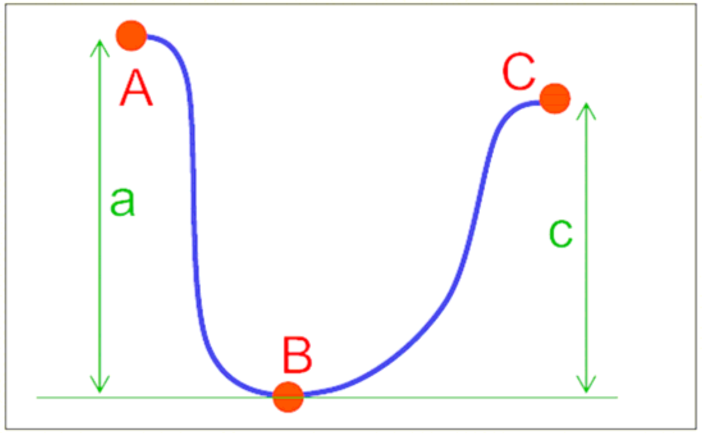
Da notare che entro le approssimazioni, il raggio dell'orbita risulta anche uguale al raggio della terra più lo spazio percorso dal satellite:

$$R = R_T + s = 6.37 \cdot 10^6 + 4.59 \cdot 10^6 = 11 \cdot 10^3\ Km$$

c) Il periodo dell'orbita T è pari al tempo che impiega il satellite per percorrere l'intera circonferenza. Dato che la velocità del satellite è V, abbiamo:

$$2\pi \cdot R = V \cdot T \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot R}{V} = \frac{2\pi \cdot 11 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^3} = 11519\ s \approx 192\ min.$$

Esercizio – Un carrello di massa 100 Kg compie il percorso indicato in figura, passando dal punto A al punto C. Nota la velocità iniziale (v_A=0) e le differenze di quota tra A e B (a=20 m) e tra C e B (c=18m), calcolare il valore dell'energia potenziale in A e della velocità in B e in C.



Soluzione – Scegliamo la costante dell'energia potenziale in modo che E^{pot}_B=0. In tal caso :

$E^{pot}_A = m\, g\, a = 100 \times 9.8 \times 20 = 19600$ J;

$E^{pot}_A + \frac{1}{2} m v_A^2 = E^{pot}_B + \frac{1}{2} m v_B^2 = mga = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow$

$v_B^2 = 2\, g\, a \Rightarrow v_B = (2 \times 9.8 \times 20)^{1/2} = 19.8$ m/s;

$m\, g\, a = \frac{1}{2} m v_C^2 + mgc \Rightarrow$

$v_C^2 = 2\, g\, (a - c) \Rightarrow v_C = [2 \times 9.8 \times (20\text{-}18)]^{1/2} = 6.26$ m/s.

Esercizio – Una pallina di massa 1 Kg urta alla velocità di 1 cm/s una seconda pallina ferma, di massa 2 Kg. Dopo l'urto, le palline si appiccicano. Trovare la loro velocità e la variazione di energia cinetica nell'urto.

Soluzione –

$$m_1 v_{ini} = (m_1 + m_2)\, v_{fin} \Rightarrow$$

$$v_{fin} = v_{ini} \times m_1 / (m_1 + m_2) = .01 \times 1 / (1 + 2) = 0.33 \text{ cm/s};$$

$$\Delta T = T_{fin} - T_{ini} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v_{fin}^2 - \tfrac{1}{2}\, m_1\, v_{ini}^2 =$$

$$= 0.5 \times (1000 + 2000) \times 0.33^2 - 0.5 \times 1000 \times 1^2 = -333 \text{ erg};$$