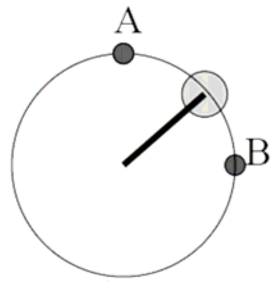
Una massa $M = 100\,g$ è collegata all'asse di un motore tramite un'asta rigida di lunghezza $L = 60\,cm$ e ruota su un piano verticale con velocità di $2\,m/s$.

a) Quanto valgono il periodo del moto e l'accelerazione centripeta?

b) Cosa si può dire della risultante delle forze lungo la traiettoria?

c) Spiegare a quali forze (indicandone modulo direzione e verso) è soggetta la massa M durante la rotazione, e calcolare il valore della risultante e della forza esercitata dall'asta nei punti A e B della traiettoria.



Ris.: $T = 1.88\,s$; $a_c = 6.67\,m/s^2$; $\vec{F}_R = -m\omega^2\vec{r}$; $\vec{F}_{asta}(A) = (0, 0, 0.31)\,N$; $\vec{F}_{asta}(B) = (0, -0.67, 0.98)\,N$

<u>*Soluzione:*</u>

a) **Quanto valgono il periodo del moto e l'accelerazione centripeta?**

- **Quanto vale il periodo del moto?**

  Il periodo del moto (si tratta di un moto circolare uniforme) è definito come il tempo impiegato per compiere un giro. Dato che il modulo della velocità in un moto circolare uniforme è costante, questo significa che

  $$vT = 2\pi r$$

  quindi

  $$T = \frac{2\pi r}{v}$$

  Numericamente:

  $$T = \frac{2\pi 60\,cm}{2\,m/s} = \frac{2\pi 60(0.01\,m)}{2\,m/s} = 1.88\,s$$

- **Quanto vale l'accelerazione centripeta?**

  – L'accelerazione è definita come

  $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

  – L'accelerazione centripeta in un moto circolare uniforme è data da

  $$\vec{a}_c = -\omega^2\vec{r}$$

  ed è sempre parallela al raggio, diretta verso il centro. Per calcolarla devo conoscere ω.

  ∗ La velocità angolare è definita come

  $$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

  . In un moto circolare uniforme la velocità angolare è costante. In un periodo Δ *theta* $= 2\pi$ e $\Delta t = T$, quindi ricavo subito

  $$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}$$

  Quindi

  $$a_c = \frac{v^2}{r}$$

  Numericamente:

  $$a_c = \frac{(2\,m/s)^2}{60\,cm} = \frac{(2\,m/s)^2}{60(0.01\,m)} = 6.67\,m/s^2$$

b) **Quanto vale la risultante delle forze?**

- La risultatnte delle forze è definita come la somma vettoriale di tutte le forze agenti sul corpo
$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$$
- La risultante delle forze in un moto qualsiasi è legata all'accelerazione dalla legge di Newton, che è
$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$
quindi nel caso specifico del moto circolare uniforme:
$$\vec{F}_R = m\vec{a}_c = -m\omega^2\vec{r}$$

la risultante delle forze ha modulo costante pari a $m\omega^2 r$, mentre la sua direzione è parallela al raggio della circonferenza e diretta verso il centro.
Numericamente
$$|F_R| = ma_c = 100\,g \cdot 6.67\,m/s^2 = 0.1\,kg \cdot 6.67\,m/s^2 = 0.67\,N$$

c) **A quali forze è soggetta la massa M durante la rotazione ?** Le forze che agiscono sono la forza peso ($\vec{F}_P$) e la reazione vincolare dell'asta ($\vec{F}_V$)

d) **Modulo direzione e verso delle forze ?** Il fatto che l'oggetto si muova di moto circolare uniforme mi permette di conoscere in ogni posizione la risultante delle due forze:
$$\vec{F}_R = \vec{F}_P + \vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r}$$

- **Modulo direzione e verso della forza peso?** La forza peso è sempre diretta verso il basso e ha modulo pari a Mg
- **Modulo direzione e verso della reazione vincolare?** La reazione vicolare non è nota direttamente.
E' noto solo il valore della sua risultante con la forza peso:
$$\vec{F}_P + \vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r}$$
quindi
$$\vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r} - \vec{F}_P$$

Quanto vale la reazione vincolare in A e in B? Punto per punto
$$\vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r} - \vec{F}_P$$

Dato che è una equazione vettoriale mi rappresenta in realtà una equazione per ciascuna componente:
$$\begin{aligned} F_{Vx} &= -F_{Px} - m\omega^2 r_x \\ F_{Vy} &= -F_{Py} - m\omega^2 r_y \\ F_{Vz} &= -F_{Pz} - m\omega^2 r_z \end{aligned}$$

per calcolare la reazione vincolare devo quindi scrivere le componenti di $\vec{F}_P$ e $\vec{r}$ in A e B.

- **Quali sono le componeti di $\vec{F}_P$ e $\vec{r}$?**
Per scrivere le componenti di un vettore devo fissare un sistema di riferimento.
In questo caso per esempio x perpendicolare al foglio, y orizzontale e z verticale.
In questo sistema di riferimento $\vec{F}_P = (0, 0, -mg)$ mentre $\vec{r} = (0, r\cos\theta, r\sin\theta)$ dove θ è l'angolo formato dal raggio con l'asse orizzontale.

Nel punto A $\vec{r}(A) = (0, 0, r)$, nel punto B $\vec{r}(B) = (0, r, 0)$. Quindi

$$\begin{aligned} F_{Vx}(A) = & \; -F_{Px} - m\omega^2 r_x = \; 0 \\ F_{Vy}(A) = & \; -F_{Py} - m\omega^2 r_y = \; 0 \\ F_{Vz}(A) = & \; -F_{Pz} - m\omega^2 r_z = \; mg - m\omega^2 r \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} F_{Vx}(B) = & \; -F_{Px} - m\omega^2 r_x = \; 0 \\ F_{Vy}(B) = & \; -F_{Py} - m\omega^2 r_y = \; -m\omega^2 r \\ F_{Vz}(B) = & \; -F_{Pz} - m\omega^2 r_z = \; mg \end{aligned}$$

Numericamente

$$\vec{F}_V(A) = (0, 0, mg - m\omega^2 r) = (0, 0, 0.31)\, N \qquad |F_V(A)| = 0.31\, N$$

$$\vec{F}_V(B) = (0, -m\omega^2 r, mg) = (0, -0.67, 0.98)\, N \qquad |F_V(B)| = 1.41\, N$$